

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

PROCEEDINGS
VOLUME XXXIX

No. 6

President: J. VAN DER HOEVE

Acting-Secretary: H. R. KRUYT

CONTENTS

KEESOM, W. H., and G. SCHMIDT: "Researches on heat conduction by rarefied gases".
I. The thermal accommodation coefficient of helium, hydrogen, neon and nitrogen
on glass at 0° C.", p. 716.

BÖESEKEN, J.: "The oxidation products of thio-urea. The dioxide as derivative of
sulphoxylic acid (H_2SO_2)", p. 717.

WIERSMAN, E. D.: "Physical Resemblance in connection with mental similarity". I, p. 721.

MAHLER, KURT: "Ein Analogon zu einem SCHNEIDERSchen Satz". (Zweite Mitteilung)
(Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 729.

FREUDENTHAL, HANS: "Eine Klasse von Ringen im Hilbertschen Raum". (Communicated
by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 738.

FREUDENTHAL, HANS: "Zur Abstraktion des Integralbegriffs". (Communicated by Prof.
L. E. J. BROUWER), p. 741.

BLEEKER, W.: "Meteorologisches zu den 3 holländischen Karakorum-Expeditionen".
I. (Communicated by Prof. E. VAN EVERDINGEN), p. 746.

WEEVERS, TH.: "A Consideration of some Phytochemical Problems". (Communicated by
Prof. J. C. SCHOUTE), p. 757.

JONGE-COHEN, TH. E. DE: "Radix praemolarica unilateralis". (Communicated by Prof.
M. W. WOERDEMAN), p. 761.

SUZUKI, NAOKICHI: "The diencephalic and some other systems in Xantharpyia amplexi-
caudata". I. (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS), p. 766. (With one plate).

EYKEN, B. VAN DER: "Gebiss- und Zahnenwicklung bei der Irisforelle (Salmo irideus).
VI. (Schluss) Zahnenwicklung". (Communicated by Prof. M. W. WOERDEMAN),
p. 773. (With one plate).

RUYS, A. CHARLOTTE: "The isolation of typhoid bacilli from water". (Communicated
by Prof. W. A. P. SCHÜFFNER), p. 780. (With one plate).

DANTZIG, D. VAN: "Ricci-Calculus and Functional Analysis". (Communicated by Prof.
J. A. SCHOUTEN), p. 785.

Physics. — *Researches on heat conduction by rarefied gases. I. The thermal accommodation coefficient of helium, hydrogen, neon and nitrogen on glass at 0°C.* By W. H. KEESEM and G. SCHMIDT. (Abstract of Communication N°. 242c from the KAMERLINGH ONNES Laboratory at Leiden).

(Communicated at the meeting of May 23, 1936).

For the heat conduction by rarefied gases KNUDSEN¹⁾ derived the formula:

$$W = 43.77 \times 10^{-6} \cdot \frac{c_p + c_v}{c_p - c_v} \frac{p}{\sqrt{M \cdot T}} (T_1 - T_2) \text{ cal. cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}.$$

p is expressed in microbars.

If the surfaces between which the heat is transported are not perfectly rough, a coefficient a_{n_1, n_2} has to be added. n_1 and n_2 are relative to the number of collisions a molecule suffers before it leaves the surface. $a_{\infty, \infty} = 1$. $a_{1, \infty}$ is commonly called the accommodation coefficient.

SCHLEIERMACHER's method was used. Therefore a glass wire was made, long 2.61 cm, thick 38μ , regular over the whole length. As nucleus it contained a platinum heating wire of 15μ .

The apparatus also contained two wire systems, consisting of three thin tungsten wires, provided with small particles of gold, silver and copper, so that the experimental wire could be covered with these metals by vaporizing.

The first series of experiments are relative to the accommodation coefficients of helium, hydrogen, neon and nitrogen on glass at 0°C. The results are:

helium	$\bar{a}_{1, \infty} = 0.336$
hydrogen	0.283
neon	0.670
nitrogen	0.855

They compare remarkably well with KNUDSEN's values: He 0.338, H₂ 0.278, Ne 0.653. SODDY and BERRY²⁾ found about the same results. ORNSTEIN and VAN WIJK³⁾ obtained for He 0.32 at 377°C.

In a following paper we expect to give the results of measurements in the temperature range 70—90°K.

¹⁾ M. KNUDSEN, Ann. Physik (4) **34**, 593, (1911).

²⁾ F. SODDY and A. J. BERRY, Proc. roy. Soc. London A **83**, 254, (1910); A **84**, 576, (1911).

³⁾ L. S. ORNSTEIN and W. R. VAN WIJK, Z. Phys. **78**, 734, (1932).

Chemistry. — The oxidation products of thio-urea. The dioxide as derivative of sulphonylic acid (H_2SO_2). By J. BÖSEKEN.

(Communicated at the meeting of May 23, 1936).

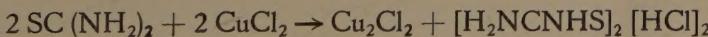
Concerning the oxidation of thio-urea a great deal is known, yet the direct oxidation products, either containing oxygen or not, were thus far hardly studied. By an investigation of thio-urea and its derivatives as anti-yellowing material in the reproduction technique, which in the main is due to the strongly reducing properties of these important substances, I became acquainted with the oxidation products and the manner in which they were formed.

Already long ago ¹⁾ it was found that with potassium permanganate or with hydrogen peroxide in acid solution thio-urea behaves as the isothio compound, consequently as a mercaptan and that then in accordance with this a dithio compound is formed. Since this compound possesses basic properties, it forms a salt with the added acid which is fairly proof against further oxidation.

With halogens and even with iodine these salts are formed ²⁾ directly and consequently the reaction seems to obtain the character of an addition:



The capacity of thio-urea to change into the isothio compound stamps this substance as a very powerful reductive; this appears, besides from the above-mentioned properties, also from its behaviour towards cupri-salts, such as cuprichloride, which in the cold is reduced to cuprochloride.



These salts of *dithioformamidine* may be most simply prepared by dissolving thio-urea with a little more than the calculated amount of acid in as little as possible of 50 % alcohol and under ice-cooling oxidizing it with the calculated amount ($\frac{1}{2}$ mol) of H_2O_2 . In this way I prepared the sulphate, oxalate, hydrochloric salt, and tartrate. The sulphate and oxalate have no water of crystallization, the hydrochloric salt five molecules (titrimetrically determined), the tartrate is unstable.

The free basis, dithioformamidine, however, is very unstable, since it

¹⁾ STORCH. M. 11, 452 (1890).

²⁾ CLAUS. Am. 179, 135 (1875).

decomposes into sulphocyanic acid, sulphur and cyanamide. For this reason it did not seem right to start from this compound for the study of the further course of oxidation.

It was found by E. DU BARRY BARTLETT¹⁾ that thio-urea in *neutral* solution changes with hydrogen peroxide into the dioxide, the composition of which was established by analysis and determination of the molecular weight. He supposes this substance to be formamidine sulphinic acid, $\text{HNCNH}_2\text{SO}_2\text{H}$, because of a weak acid reaction and the absence of reducing properties. In reality this substance is neutral towards litmus and Congo red and in ammoniacal solution it is one of the most powerful reductives we know; in acid solution also it has a strongly reducing action. This may be apparent from the following phenomena:

On heating an ammoniacal solution of $\text{Cd}(\text{OH})_2$ quickly with an excess of the dioxide, *metallic cadmium is precipitated*, partly in the form of grey powder, partly as a mirror. As far as I know, this is the only substance capable of this; with $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_4$ there is a precipitate of CdS , but not of metal (see below). It stands to reason that all other, less electro-positive, metals are separated by this agent as such, often, as is the case with cadmium, mixed with the sulphide. Lead, for example, is precipitated in the form of a spongy metal, tin from a stannous solution as a mirror; in the same way copper, nickel and cobalt from their ammoniacal solutions, the yet more electro-negative metals bismuth, silver, platinum and palladium as black powders; antimony is also obtained from alkaline solutions as a black powder, arsenic from an arsenite solution as a reddish brown precipitate.

If the reagent is added to an ammoniacal chromate solution, the colour becomes first beautifully red-violet; on heating this turns into blue-mauve; sometimes a greyish blue precipitate is formed of chromoxide hydrate. An alkaline chromate solution becomes slowly red-violet, then blue-violet, finally green. An alkaline KMnO_4 solution is immediately discoloured under formation of manganese peroxide; this precipitate is then completely discoloured $[\text{Mn}(\text{OH})_2]$.

Ferrihydroxide turns black, since by the side of $\text{Fe}(\text{OH})_2$ ferrous sulphide is precipitated; in any case no metallic iron is formed, not even by boiling.

Attention may be drawn to the fact that the metals Cd, Pb and Ni are only precipitated on heating the ammoniacal solutions with excess of the reagent; cobalt is formed slowly also in the cold. The behaviour towards an ammoniacal nickel solution is interesting. This blue solution turns into a bright yellow. If this is shaken with air, the blue colour returns. This may be repeated as long as there is dioxide left. Evidently the nickel is brought to a lower degree of oxidation. This solution may be used to determine the oxygen or take it away.

¹⁾ Soc. 97, 63 (1910).

The beautiful purple solution of cobalt salts in excess of ammonia first turns reddish brown, then metallic cobalt is slowly precipitated.

To the nature of these powerful reduction-reactions I shall refer later on.

In *acid* solution the dioxide likewise has a strongly reductive action. KMnO_4 is discoloured at once; at first no sulphuric acid is formed. In a hydrochloric solution (with BaCl_2) BaSO_4 is not immediately deposited (see below).

Ferric-chloride in the presence of HCl and BaCl_2 is slowly reduced, without BaSO_4 being precipitated at first; it is not formed until the reaction has proceeded for some time.

That the reduction sets in immediately, may be demonstrated with potassiumferricyanide: almost immediately Prussian blue is formed.

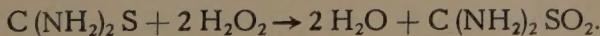
The velocity of this reaction may be traced iodometrically since the dioxide does not react on KI and very slowly on I_2 .

A solution of cuprichloride is reduced at room-temperature exceedingly slowly, similarly a nitric-acid solution of silver nitrate.

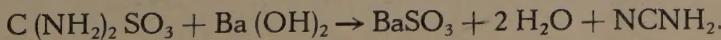
With *peracetic acid* the dioxide is rapidly oxidized to trioxide; not a trace of sulphuric acid being formed. On addition of 1 mol. of this oxidant dissolved in pure acetic acid and evaporation at room-temperature (with an electric drier) of the solvent, this trioxide, *formamidine sulphonic acid* remains in beautiful lozenge-shaped plates.

The latter compound is not attacked in the cold by KMnO_4 in acid solution; the oxidations of the dioxide with KMnO_4 , chromic acid and ferric-salts, at first no sulphuric acid being formed, consequently take place via the trioxide.

The oxidation of thio-urea in neutral solution with H_2O_2 and subsequently with peracetic acid may, therefore, be represented by:



This trioxide shows a very simple splitting-reaction with baryta. On gently heating the solution with two equivalents of this basis, BaSO_3 is precipitated (the precipitate is soluble in acids under formation of SO_2 and it uses an atom of oxygen with KMnO_4). After filtrating from this salt, an ammoniacal silver solution yields the characteristic *yellow precipitate of silver cyanamide*. The splitting-reaction is therefore:



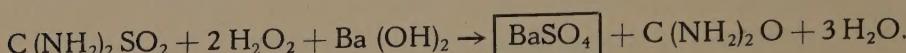
On heating the dioxide with dilute caustic soda *thiosulphate* is formed (on acidification separation of S and formation of SO_2) and a little sulphide (positive reaction on S").

If to a dilute solution of the dioxide is first added H_2O_2 and then barium hydroxide; two equivalents of this basis appear to be used; on

subsequent acidification and titration of the amount of H_2O_2 still present with KMnO_4 , two molecules appear to be used.

Repetition of this reaction with the calculated amount of H_2O_2 and baryta, filtrating off from the BaSO_4 and evaporation of the solution leaves the calculated amount of urea.

The decomposition of the dioxide consequently takes place as follows :



This may be interpreted in this manner: In the same way as the trioxide with baryta is decomposed into sulphite and cyanamide, from the dioxide is formed the hypothetical barium sulphoxylate, BaSO_2 , which is immediately oxidized by the H_2O_2 to BaSO_4 . Instead of cyanamide here the hydrate, urea, is formed.

The formation of thiosulphate by warming with dilute caustic soda is in perfect agreement with this supposition, since the unstable sodium sulphoxylate will probably be converted as follows:

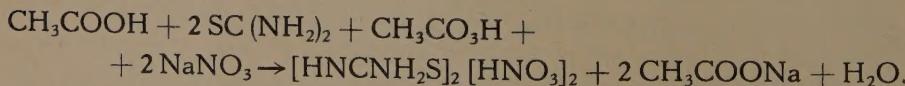


The temporary formation of ammonium sulphoxylate explains the extremely powerful reducing properties of an ammoniacal solution, particularly with excess of the dioxide. In dilute solution and especially after some time no cadmium, for example, can be deposited as a metal, but only CdS is obtained; the sulphoxylate has consequently changed into other substances lacking this capacity.

It is highly remarkable that recently¹⁾ the diaethyl ester of sulphoxyllic acid has been prepared. By spontaneous oxidation to the air this is changed into diaethyl sulphite: on saponification with dilute caustic soda it yields *thiosulphate* by the side of a little sulphide and sulphite. It is to be expected that this ester in the presence of alkali will have the same strongly reducing properties as formamidine-sulphinic acid.

In connection with these observations we studied the behaviour of thio-urea towards *peracetic acid*.

On addition of half a molecule of peracetic acid in acetic acid solution to thio-urea in the presence of sodium nitrate, the hardly soluble dithio-formamidine nitrate is practically quantitatively precipitated.



If to one mol. of thio-urea *two* mol. of peracetic acid are added in acetic acid solution and the solvent is quickly evaporated with an electric drier, the dioxide crystallizes, which by means of the nickel, chromic acid and cadmium reactions can be easily detected.

¹⁾ A. MEUWSEN and H. GEBHARDT, Berichte **69**, 937 (1936).

With three molecules of peracetic acid formamidine-sulphonic acid may be prepared directly from thio-urea.

Dithioformamidine sulphate is only very slowly attacked by peracetic acid. If first this oxidant is added and then the amount of baryta which is calculated for the $\text{SO}_4^{\text{--}}$ present, the oxidation takes place very rapidly and, according to the amount of peracetic acid, either the dioxide or the trioxide is obtained.

Thus the behaviour of thio-urea towards oxidants is explained and also the most important properties of the oxidation products have been found.

On decomposition with caustic alkalies the dioxide probably yields the salts of sulphonylic acid, the hydrate of the hypothetical *sulphur monoxide*.

The experimental details of this investigation will be published elsewhere.

Psychology. — *Physical Resemblance in connection with mental similarity.* I. By E. D. WIERSMA.

(Communicated at the meeting of May 23, 1936).

The connection between physical and mental functions has been frequently pointed out. In order to determine this connection more accurately I composed the somato-psychological inquiry, in which Dutch physicians were asked to give information concerning bodily build, physiological phenomena and psychological qualities of a large number of persons. This investigation has been elaborately discussed elsewhere. Moreover, I took the length and breadth measurements of numerous patients suffering from melancholia and dementia praecox, in order to ascertain which psychical qualities are mainly found in case of a large lateral growth and which with a greater length. The results of this investigation have been published in a monograph: *Bodily Build, Physiological and Psychological Functions*¹⁾.

The *thick-set or eurysomics*, who are characterized by a greater breadth with regard to the length of the body and all its parts, psychologically make a quiet, level-headed and thoughtful impression. They are more active, more strongly secondary and less emotional than the average. They show similarity to the phlegmatic type of temperament. Physiologically, with respect to the automatic movements, they have to be classified with the quick, quiet, sure tempo-type. The movements of the body, walking,

¹⁾ E. D. WIERSMA. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie.* Vol. XXX No. 2 (1933).

speech, writing, etc. are quiet, adequate, quick, without precipitation. With regard to the autonomic functions the thick-set belong to the hypo-autonomic tempo-type. Pulse and respiration are slow, the temperature is low.

The *slender* or *leptosomics* with respect to their length have a narrow build of the body and all its parts. Psychologically they are more emotional and irritable than the average. Physiologically they belong to the rapid, more or less uncertain and restless automatic tempo-type. They walk, speak, write with some haste, agitation and uncertainty. With regard to the autonomic functions they have to be classified with the hyper-autonomic type. Pulse and respiration are rapid, the temperature is high.

This difference in build of the eurysomics and leptosomics is not limited to the external form; it extends over internal organs and tissues, which can be easily demonstrated in the thickness of the muscular fibrils. Similarly in animals: horses, dogs, chickens, and even in the eggs and feathers these differences are found. As in man, these types of build of animals are characterized by special physiological (e.g. quickness and vivacity) and psychological qualities (e.g. tendency to be easily startled). These facts show that persons who physically resemble each other will also in their physiological and psychological phenomena display more similarity than the persons who do not resemble each other.

The heredity-inquiry, made up by HEYMANS and myself, owing to the kindness of the Dutch physicians, placed at our disposal a great number of psychograms of parents and their children. Thus the heredity of the various psychical qualities¹⁾ could be accurately determined. In this inquiry it is also asked whether the child physically rather resembles the father or the mother. If physical resemblance implies a greater similarity psychologically, the children who have a greater physical resemblance to one of the parents will also show a greater mental similarity to this parent than to the father or the mother whom they do not resemble.

The heredity-inquiry gives information on the psychical qualities of 458 fathers, 458 mothers and 1608 children. Of the 1608 children 1247 appear physically to resemble one of their parents. It was besides stated of 356 children that no physical resemblance to the parents existed.

This material is highly sufficient to form a judgment on the connection of mental qualities with the bodily build. For this purpose it was ascertained whether the child physically resembling one of the parents shows a greater similarity to this parent with regard to the mental functions than to the father or mother whom it does not resemble. By means of this investigation I have tried to form a judgment on this subject with respect to the temperamental qualities, the intellect and the tendencies.

The following tables give a synopsis of the percentage of children with similarly directed mental qualities as one of the parents whom they *do* resemble and whom they *do not* resemble.

¹⁾ G. HEYMANS und E. D. WIERSMA, Zeitschr. f. Psychol. Bd. 42.

Temperamental qualities.

Percentage of the children with similarly directed temperamental qualities as the parents whom they physically resemble or do *not* resemble.

<i>Simple temperamental qualities</i>		<i>Resemble</i>		<i>Do not resemble</i>
Active	A	63.4		A
Non-active	nA			nA
Emotional	E			E
Non-emotional	nE	48.8		nE
Secondary	S			S
Primary	P	55.2		P
	Average	55.8		48.2
<i>Compound temperamental qualities</i>		<i>Resemble</i>		<i>Do not resemble</i>
Active emotional	AE			AE
Active non-emotional	AnE			AnE
Non-active emotional	nAE	29.9		nAE
Non-active non-emotional	nAnE			nAnE
Active secondary	AS			AS
Active primary	AP			AP
Non-active secondary	nAS	44.8		nAS
Non-active primary	nAP			nAP
Emotional secondary	ES			ES
Emotional primary	EP			EP
Non-emotional secondary	nES	24.3		nES
Non-emotional primary	nEP			nEP
	Average	33.0		23.5

Types of temperament

Phlegmatic	AnES		AnES
Sanguine	AnEP		AnEP
Passionate	AES		AES
Choleric	AEP		AEP
Sentimental	nAES	17.5	nAES
Nervous	nAEP		nAEP
Apathetic	nAnES		nAnES
Amorphous	nAnEP		nAnEP

According to this table the similarity in activity and non-activity, in emotionality and non-emotionality, in secondary and primary functions between parents and children is greater when they physically resemble each other than when they do *not* resemble each other.

Concerning the compound temperamental qualities it appears that the combination of activity and non-activity with emotionality, the combination of activity and non-activity with the secondary and primary functions, the combination of emotionality with the secondary and primary functions are considerably more similarly directed with the parents whom they physically resemble than with the parents whom they do not resemble.

The types of temperament also are more similarly directed with the parents whom the children physically resemble than with those whom they do not resemble.

Intellectual functions.

In previous publications the differences in intellectual functions were pointed out. We distinguished the intellectual advantage and the intellectual inferiority.

The *intellectual advantage* is characterized by an optimal harmonious co-operation of the functions. The intellectual level is higher. To this group belong the *level-headed*, who are sensible, who have accurately arranged their knowledge and make a good use of it, and the *quicker-witted*, who are intelligent, understand easily and quickly see the point, who in a conversation at once understand what is meant from incomplete and inaccurate data, who easily find their way out of difficult situations.

The *intellectual inferiority*, characterized by a reduced intellectual activity, by a lowered level of consciousness, displays the rudimentary phenomena of senile dementia, dementia paralytica and dementia epileptica. To this group belong the *superficial*, who judge by hasty impressions and frequently contradict themselves, and the *stupid* who cannot understand simple matters.

The following table gives a synopsis of this.

Percentage of children with similarly directed intellectual capacities as the parents whom they physically resemble or do *not* resemble.

<i>Intellectual advantage and inferiority</i>	<i>Resemble</i>	<i>Do not resemble</i>
sensible	32.6	29.1
intelligent	32.8	31.6
superficial and stupid	5.5	4.7
practical		
unpractical	57.6	49.2
broad-minded		
narrow-minded	53.1	41.2
good observer		
not	41.8	37.1
exceptionally good		
good	65.0	62.7
bad memory		
Average	41.3	36.5

From this table it is clearly apparent that a greater physical resemblance between parents and children is accompanied by a greater similarity of the intellectual performances. This applies to the performances pointing

to an intellectual advantage and to those indicating an intellectual inferiority. Level-headedness and quickness of mental grasp, superficiality and stupidity, the ability and inability to make plans and find a way out of difficult situations, more or less narrow-mindedness, being free from prejudices or not, more or less conventionality, the capacity or incapacity to observe all sorts of small matters and changes in the surroundings, the possession of an exceptionally good, a good or a bad memory, display a greater similarity to the parents whom they resemble than to the parents whom they do *not* resemble.

Tendencies.

The character is manifested in the proportion of the power of the tendencies and on this it depends which motives are accepted for an object. In imitation of PAULHAN we distinguish the vital, egoistic, altruistic and abstract tendencies.

1. Vital tendencies.

The vital tendencies are directed to the fulfilment of physical and mental needs.

In satisfying the physical needs may be distinguished the *avid* who readily indulge in physical enjoyment, who, for example, like good food and drink and who are sexually dissolute, from the *moderate*, who can offer great resistance to urging desires, who, for instance; attach less value to the pleasures of the table and who are more continent in sexual matters.

In satisfying mental needs may be distinguished the *passively* observant, who are diverted by the distractions offered without exerting themselves, from the *active* observers who seek distraction and in so doing find satisfaction. The contrast between active concentration and passive surrender of the observation is manifest in the wish to go into society (club, public amusements, etc.), in the habit of reading much or little, in the capacity to remember and relate what is read accurately and in good order or inaccurately and vaguely, in more or less pleasure to collect natural and artistic objects, antiquities, stamps, etc., to practise various forms of sports, intellectual games (chess, dominoes, etc.).

In the following table has been expressed the percentage of children who with regard to the above-mentioned vital tendencies are similarly directed as the parents whom they physically resemble and those whom they physically do *not* resemble.

From that table it appears that physical resemblance of the children to one of the parents is accompanied by a greater similarity of the vital tendencies to the parents whom they resemble than to those whom they do *not* resemble.

Percentage of children with similarly directed vital tendencies as the parents whom they physically resemble or do *not* resemble.

		Resemble	Do not resemble
Fond of good food and drink		44.7	38.9
Or not			
Sexually dissolute		49.0	44.4
Or continent			
Fond of going out		59.7	54.7
Domesticated			
Reading much or little			
Remembering accurately		71.1	62.8
Inaccurately			
Vaguely			
Collector		1.5	0.9
Fond of sports		20.8	16.3
Fond of intellectual games		15.6	12.9
Average		37.5	33.0

2. *Egophilic and altruistic tendencies.*

The egophilic tendencies are directed to one's own material and mental circumstances, the altruistic ones to the welfare of others or of the community. On account of the great difference in power of the various forms of these tendencies, we distinguish the haughty and modest, the covetous and non-covetous, the arrogant elbowers and less pretentious, the egoists and compassionate, the philanthropists and egocentric persons.

The *haughty* overestimate their own capacities, they are pleased with their performances, vain and coquettish, ambitious, they aspire to recognition, they prefer to talk about persons and about themselves; the *modest* possess much self-criticism, they underrate their own performances, they think that they can do less than others, they are not vain and pay little attention to their appearance, they are not particularly fond of public honours and mainly speak about things.

The *covetous* aspire to the possession of money; the *noncovetous* are disinterested and do not think in the first place of financial advantages.

The *arrogant* everywhere place themselves in the foreground by means of a loud and sharp tone of voice and by expressing a definite opinion on every question; the *less pretentious* are not inclined to dominate others, they are more equable in tone and less positive in the expression of their opinions.

The *egoists* have little sympathy with the fate of others and mainly seek advantage; the *compassionate* are helpful, they cannot refuse assistance.

The *philanthropists* sympathize with others, they feel friendship for fellow-men, they make themselves beloved by children and like to play with them, they are fond of animals: dogs, cats, horses, birds, etc., they are kind to servants and subordinates, take much trouble for their welfare

and do not make them feel their subordinate position, they are philanthropically active, visit the poor, are on the committee of philanthropic institutions, they are considerate, have attentions and consideration for others and carefully avoid words and deeds which might hurt, they are warm patriots and proud of their nationality; the *egocentric* are full of the circumstances of their own, they are solely occupied with themselves, they do not feel friendship for others and animals, they do not care much for their subordinates and servants, they are not philanthropically active and even do not or hardly lend financial support, they feel little for their native country.

Percentage of children with similarly directed egophilic and altruistic tendencies as the parents whom they physically resemble or do *not* resemble.

		<i>Resemble</i>	<i>Do not resemble</i>
<i>Haughtiness and modesty</i>			
Self-overrating		35.6	27.8
Self-underrating	{	38.8	34.5
Vain and coquettish		39.9	24.6
Not	{	46.4	36.5
Ambitious			
Indifferent to public honours	{	40.6	34.0
Talking of things			
Of persons and themselves	{	2.9	2.6
<i>Covetous and not covetous</i>			
Avaricious			
Disinterested	{	41.5	34.6
<i>Arrogant and unassuming</i>			
In tone shouting			
Clipping his words	{	63.7	60.0
Definite opinions			
Conditional	{	71.3	66.5
<i>Helpfulness and egoism</i>			
Compassionate			
Egoistic	{	31.4	27.8
<i>Philanthropic and egocentric</i>			
Fond of children		35.9	29.7
Not	{	53.2	48.2
Fond of animals			
Not	{	43.8	38.1
Good to subordinates			
Not	{	35.9	35.7
Philanthropically active			
Financial support	{	31.4	27.8
Not			
Warm patriot			
Not	{	41.9	35.7

According to the above table the similarity with regard to the egophilic and altruistic tendencies of the children to the parents whom they resemble is considerably greater than to the parents whom they do *not* resemble.

3. Abstract tendencies.

These tendencies are directed to abstract conceptions. We distinguish the higher tendencies: sense of duty, truthfulness, honesty, tolerance, courage, independence, unaffected behaviour, from the lower forms: neglect of duty, less truthfulness, unreliability, intolerance, fearfulness, enhanced suggestibility, affectation or mannerism.

The *dutiful* are in the habit of tackling and finishing their work with energy; the *less dutiful* neglect compulsory work in profession, studies, housekeeping, etc. for voluntary activity in societies, subsidiary studies, hobbies, etc. and are inclined to postpone their correspondence, the arrangement of business, etc.

The *truthful* are strictly reliable; the *less truthful* are inclined to exaggerate, to embellish their stories and even to tell lies.

The *honest* are absolutely reliable in everything, they honestly admit their intentions; the *unreliable* either are only honest within the limits of the law or they are definitely dishonest, diplomatic, conceal their opinions and intentions, and make use of unfair means.

The *tolerant* are on friendly terms with persons of another way of thinking; the *intolerant* feel hatred against professors of another creed, they prefer to buy from persons of the same religion or party.

The *courageous* behave manfully in case of riots, fire, burglary, etc., they are stimulated by danger; the *fearful and cowardly* avoid danger and take to flight.

The *independent* have opinions of their own; the *suggestible* are inclined to repeat the opinions of others.

The *unaffected* are natural in their behaviour, they show themselves as they really are; the *affected* are more or less constrained, they do not feel at ease or are inclined to affectation and posing.

Percentage of children with similarly directed abstract tendencies as the parents whom they physically resemble or do *not* resemble.

	<i>Resemble</i>	<i>Do not resemble</i>
<i>Dutiful and not dutiful</i>		
Negligence of compulsory work	2.4	1.2
Inclined to postpone to tackle with energy	50.9	43.1
<i>Truthful and not truthful</i>		
Strictly credible		
Exaggeration, embellishing, mendacious	60.5	53.6

		<i>Resemble</i>	<i>Do not resemble</i>
<i>Honest and unreliable</i>			
Absolutely reliable			
Within the limits of the law	}	72.2	68.2
Dishonest	}		
Admitting intentions	}	60.2	56.1
Diplomatic, intriguing	}		
<i>Tolerant and intolerant</i>			
Tolerant	}	72.8	64.7
Intolerant	}		
<i>Courageous and fearful</i>			
Brave in danger	}	40.8	36.5
Fearful and cowardly	}		
<i>Steadfastness and suggestibility</i>			
Independent	}	54.1	49.0
Repeating what others say	}		
<i>Unaffected and affected</i>			
Absolutely natural	}	60.9	53.2
More or less forced	}		
Affected	}		
Average		<u>53.6</u>	<u>48.0</u>

From this table it is clear that also with regard to the higher and lower abstract tendencies there exists a greater similarity between parents and children who physically resemble each other than between those who do *not* resemble each other.

(*To be continued*).

Mathematics. — Ein Analogon zu einem SCHNEIDERSchen Satz. Von KURT MAHLER. (Zweite Mitteilung). (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of May 23, 1936)

Schluss des Beweises von Satz 2.

§ 7. Die SCHNEIDERSche Identität.

Das so bestimmte Polynom $R(z_1, z_2, \dots, z_k)$ ist in den Veränderlichen z_1, z_2, \dots, z_k der Reihe nach höchstens von den Graden r_1, r_2, \dots, r_k . Es lässt sich auf die Gestalt

$$R(z_1, z_2, \dots, z_k) = \sum_{h_1=0}^{r_1} z_1^{h_1} \mathfrak{R}_{h_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k)$$

bringen, wo die $\mathfrak{R}_{h_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k)$ ($h_1 = 0, 1, \dots, r_1$) Polynome in z_2, z_3, \dots, z_k der Reihe nach höchstens von den Graden r_2, r_3, \dots, r_k und

nicht alle identisch Null sind. Sei von ihnen eine gewisse Anzahl, etwa $t_1 + 1$ mit $t_1 \geq 0$, linear unabhängig, und seien

$$R_{\tau_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k) \not\equiv 0 \quad (\tau_1 = 0, 1, \dots, t_1)$$

diese unabhängigen Polynome. Da in diesen Polynomen nur höchstens $\prod_{x=2}^k (r_x + 1)$ verschiedene Potenzprodukte $z_2^{h_2} z_3^{h_3} \dots z_k^{h_k}$ auftreten, so ist gewiss

$$t_1 + 1 \leq \prod_{x=2}^k (r_x + 1).$$

Die $\mathfrak{R}_{h_1}^{(1)}$ lassen sich durch die $R_{\tau_1}^{(1)}$ in der Form

$$\mathfrak{R}_{h_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k) = \sum_{\tau_1=0}^{t_1} a_{h_1 \tau_1}^{(1)} R_{\tau_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k) \quad (h_1 = 0, 1, \dots, r_1)$$

mit konstanten Koeffizienten $a_{h_1 \tau_1}^{(1)}$ ausdrücken; die Matrix

$$(a_{h_1 \tau_1}^{(1)})_{\substack{h_1=0,1,\dots,r_1 \\ \tau_1=0,1,\dots,t_1}}$$

hat dabei offenbar den genauen Rang $t_1 + 1$. Setzen wir

$$p_{\tau_1}^{(1)}(z_1) = \sum_{h_1=0}^{t_1} a_{h_1 \tau_1}^{(1)} z_1^{h_1} \quad (\tau_1 = 0, 1, \dots, t_1),$$

so sind demnach diese Polynome in z_1 linear unabhängig, so dass ihre WRONSKI-Determinante

$$\Delta^{(1)}(z_1) = \left| \frac{d^{\tau_1} p_{\tau_1}^{(1)}(z_1)}{\sigma_1 / d z_1^{\tau_1}} \right|_{\tau_1=0,1,\dots,t_1}$$

nicht identisch verschwinden kann. Es ist aber

$$R(z_1, z_2, \dots, z_k) = \sum_{\tau_1=0}^{t_1} p_{\tau_1}^{(1)}(z_1) R_{\tau_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k)$$

und folglich auch

$$\frac{\partial^{\tau_1} R(z_1, z_2, \dots, z_k)}{\sigma_1 / \partial z_1^{\tau_1}} = \sum_{\tau_1=0}^{t_1} \frac{d^{\tau_1} p_{\tau_1}^{(1)}(z_1)}{\sigma_1 / d z_1^{\tau_1}} R_{\tau_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k) \quad (\sigma_1 = 0, 1, \dots, t_1).$$

Diese Beziehungen lassen sich als ein System von $t_1 + 1$ linearen Gleichungen für die $t_1 + 1$ Ausdrücke $R_{\tau_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k)$ mit der Determinante $\Delta^{(1)}(z_1)$ auffassen; man kann dasselbe z.B. nach

$$R^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k) = R_0^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k)$$

auflösen und bekommt dann die Gleichung

$$\Delta^{(1)}(z_1) R^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k) = \sum_{\tau_1=0}^{t_1} \Delta_{\tau_1}^{(1)}(z_1) \frac{\partial^{\tau_1} R(z_1, z_2, \dots, z_k)}{\tau_1! \partial z_1^{\tau_1}}, \quad . \quad (21)$$

wobei die $\Delta_{\tau_1}^{(1)}(z_1)$ ($\tau_1 = 0, 1, \dots, t_1$) gewisse Polynome und zwar bis auf das Vorzeichen gerade Unterdeterminanten von $\Delta^{(1)}(z_1)$ sind.

Da $R^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k)$ nicht identisch verschwindet und analoge Grad-eigenschaften wie $R(z_1, z_2, \dots, z_k)$ besitzt, kann man es dem gleichen Verfahren unterwerfen und somit eine Beziehung

$$\Delta^{(2)}(z_2) R^{(2)}(z_3, z_4, \dots, z_k) = \sum_{\tau_2=0}^{t_2} \Delta_{\tau_2}^{(2)}(z_2) \frac{\partial^{\tau_2} R^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k)}{\tau_2! \partial z_2^{\tau_2}} . \quad (22)$$

herleiten, wo jetzt

$$R^{(2)}(z_3, z_4, \dots, z_k) \quad , \quad \Delta^{(2)}(z_2) \quad , \quad \Delta_{\tau_2}^{(2)}(z_2)$$

gewisse Polynome sind, von denen die beiden ersten nicht identisch verschwinden, das erste der Reihe nach höchstens von den Graden t_3, t_4, \dots, t_k in z_3, z_4, \dots, z_k ist und wo die natürliche Zahl $t_2 + 1$ der Ungleichung

$$t_2 + 1 \leq \prod_{\lambda=3}^k (t_\lambda + 1)$$

genügt.

So kann man fortfahren und ein System von Identitäten

$$\Delta^{(\kappa)}(z_\kappa) R^{(\kappa)}(z_{\kappa+1}, z_{\kappa+2}, \dots, z_k) = \sum_{\tau_\kappa=0}^{t_\kappa} \Delta_{\tau_\kappa}^{(\kappa)}(z_\kappa) \frac{\partial^{\tau_\kappa} R^{(\kappa-1)}(z_\kappa, z_{\kappa+1}, \dots, z_k)}{\tau_\kappa! \partial z_\kappa^{\tau_\kappa}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ (\kappa=1, 2, \dots, k-1) \end{array} \right\} \quad (23)$$

herleiten; dabei sind dann

$$R^{(\kappa)}(z_{\kappa+1}, z_{\kappa+2}, \dots, z_k) \text{ und } \Delta^{(\kappa)}(z_\kappa) \quad (\kappa=1, 2, \dots, k-1)$$

gewisse nicht identisch verschwindende Polynome,

$$\Delta_{\tau_\kappa}^{(\kappa)}(z_\kappa) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \tau_\kappa=0, 1, \dots, t_\kappa \end{array} \right\} \quad (\kappa=1, 2, \dots, k-1)$$

gewisse andere Polynome, und $t_1 + 1, t_2 + 1, \dots, t_{k-1} + 1$ gewisse natürliche Zahlen, die den Ungleichungen

$$t_\kappa + 1 \leq \prod_{\lambda=\kappa+1}^k (t_\lambda + 1) \quad (\kappa=1, 2, \dots, k-1) \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

genügen. Setzen wir noch der Gleichmässigkeit halber

$$R^{(k-1)}(z_k) = \Delta^{(k)}(z_k)$$

und eliminieren wir die Polynome $R^{(z)}(z_{z+1}, z_{z+2}, \dots, z_k)$ ($z = 1, 2, \dots, k-1$) aus den Identitäten (23), so folgt schliesslich die SCHNEIDERsche identische Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} \prod_{z=1}^k \Delta^{(z)}(z_z) &= \\ &= \sum_{\tau_1=0}^{r_1} \sum_{\tau_2=0}^{r_2} \dots \sum_{\tau_{k-1}=0}^{r_{k-1}} \Delta_{\tau_1}^{(1)}(z_1) \dots \Delta_{\tau_{k-1}}^{(k-1)}(z_{k-1}) R_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_{k-1}}(z_1, z_2, \dots, z_k). \end{aligned} \right\} (25)$$

(Statt dieser Identität lässt sich auch eine ähnliche andere Identität benutzen, die C. SIEGEL in seiner Arbeit ¹⁾ ableitet und verwendet).

§ 8. Schluss des Beweises.

Das in § 6 konstruierte Polynom R lässt sich an der Stelle $z_1 = z_2 = \dots = z_k = z$ in die endliche TAYLORreihe

$$R(z_1, z_2, \dots, z_k) = \sum_{h_1=0}^{r_1} \dots \sum_{h_k=0}^{r_k} R_{h_1 h_2 \dots h_k}(z, z, \dots, z) (z_1 - z)^{h_1} (z_2 - z)^{h_2} \dots (z_k - z)^{h_k}$$

entwickeln; seine partielle Ableitung

$$R_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_{k-1} 0}(z_1, z_2, \dots, z_k) = \frac{\partial^{\tau_1 + \dots + \tau_{k-1}} R(z_1, z_2, \dots, z_k)}{\tau_1! \dots \tau_{k-1}! \partial z_1^{\tau_1} \dots \partial z_{k-1}^{\tau_{k-1}}}$$

besitzt daher die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} R_{\tau_1 \dots \tau_{k-1} 0}(z_1, z_2, \dots, z_k) &= \sum_{h_1=0}^{r_1} \dots \sum_{h_k=0}^{r_k} R_{h_1 h_2 \dots h_k}(z, z, \dots, z) \binom{h_1}{\tau_1} \dots \binom{h_{k-1}}{\tau_{k-1}} \times \\ &\quad \times (z_1 - z)^{h_1 - \tau_1} \dots (z_{k-1} - z)^{h_{k-1} - \tau_{k-1}} (z_k - z)^{h_k}. \end{aligned}$$

Wird speziell für z die Nullstelle ζ von $f(z)$ eingesetzt, so verschwinden nach § 6 alle Zahlen

$$R_{h_1 h_2 \dots h_k}(\zeta, \zeta, \dots, \zeta) \text{ mit } h_1 \geq 0, h_2 \geq 0, \dots, h_k \geq 0, \sum_{z=1}^k \frac{h_z}{r_z} \leq 1 - \varepsilon$$

und man erhält die Formel:

$$\left. \begin{aligned} R_{\tau_1 \dots \tau_{k-1} 0}(z_1, z_2, \dots, z_k) &= \sum_{h_1=0}^{r_1} \dots \sum_{h_k=0}^{r_k} R_{h_1 \dots h_k}(\zeta, \zeta, \dots, \zeta) \times \\ &\quad \times \binom{h_1}{\tau_1} \dots \binom{h_{k-1}}{\tau_{k-1}} (z_1 - \zeta)^{h_1 - \tau_1} \dots (z_{k-1} - \zeta)^{h_{k-1} - \tau_{k-1}} (z_k - \zeta)^{h_k}. \end{aligned} \right\} (26)$$

Durch direktes Differenzieren der Gleichung (20) erhält man ausserdem:

$$R_{\tau_1 \dots \tau_{k-1} 0}(z_1, z_2, \dots, z_k) = \sum_{\substack{h_1 \geq 0 \\ \dots \\ h_k \geq 0 \\ \sum_{i=1}^k \frac{h_i}{r_i} \leq 1}} R_{h_1 \dots h_k} \times \left\{ \dots \right. \\ \left. \times \binom{h_1}{r_1} \dots \binom{h_{k-1}}{r_{k-1}} z_1^{k_1 - \tau_1} \dots z_{k-1}^{h_{k-1} - \tau_{k-1}} z_k^{h_k} \right\} \quad (27)$$

Von jetzt ab sei

$$(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)\mu > (1 + \varepsilon)^2, \quad \varepsilon \leq \frac{1}{2}, \\ k \geq \frac{\log \frac{1}{2n}}{\log \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \quad r_k \geq \max \left(c_1 + 1, \frac{k}{2\varepsilon} \right); \quad \left\{ \dots \right. \quad (28)$$

die erste Ungleichung lässt sich wegen $\mu > 1$ befriedigen, indem man ε hinreichend klein nimmt. In die vorigen Polynome setzen wir für z_1, z_2, \dots, z_k der Reihe nach die Zahlwerte

$$z_{\lambda}^{(s)} = \frac{p(l_{\lambda}; s, r_k)}{q(l_{\lambda}; s, r_k)} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k). \quad \left\{ \dots \right. \quad (29)$$

ein; schliesslich durchlaufe alle genügend grossen Elemente der Folge \mathfrak{F} . Wegen (8) ist dann offenbar jedes einzelne $z_{\lambda}^{(s)}$ für höchstens endlichviele s aus \mathfrak{F} gleich einer festen Zahl: Folglich muss für alle genügend grossen s

$$\prod_{\lambda=1}^k \Delta^{(\lambda)}(z_{\lambda}^{(s)}) \neq 0$$

sein; aus der SCHNEIDERSchen Identität (25) folgt somit die Ungleichung

$$R_{\tau_1 \dots \tau_{k-1} 0}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \dots, z_k^{(s)}) \neq 0 \quad \left\{ \dots \right. \quad (30)$$

für ein gewisses Indexsystem $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}$ mit

$$0 \leq \tau_{\lambda} \leq t_{\lambda} < \prod_{\lambda=\lambda+1}^k (r_{\lambda} + 1).$$

Setzen wir nun

$$\Gamma = \sum_{h_1=0}^{r_1} \dots \sum_{h_k=0}^{r_k} |R_{h_1 \dots h_k}(\zeta, \zeta, \dots, \zeta)| 2^{r_1 + \dots + r_{k-1}}, \\ \sum_{\lambda=1}^k \frac{h_{\lambda}}{r_{\lambda}} \geq 1 - \varepsilon$$

so dass also Γ von s unabhängig wird, beachten wir ferner die Ungleichung

$$\binom{h}{\tau} \leq \sum_{\tau=0}^h \binom{h}{\tau} = 2^h,$$

so folgt offenbar aus (26):

$$|R_{\tau_1 \dots \tau_{k-1} 0}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \dots, z_k^{(s)})| \leq \Gamma A,$$

wo A die gleiche Bedeutung wie in § 4 hat, und also ist nach (15) für alle genügend grossen s aus \mathfrak{F} :

$$|R_{\tau_1 \dots \tau_{k-1} 0}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \dots, z_k^{(s)})| \leq \Gamma q(l_k; s, r_k)^{-(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)r_k \mu} \dots \quad (A)$$

Weiter folgt aus (27), dass

$$R_{\tau_1 \dots \tau_{k-1} 0}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \dots, z_k^{(s)})$$

eine rationale Zahl ist, deren Nenner in der natürlichen Zahl M aufgeht, wo M die gleiche Bedeutung wie in § 4 hat. Da aber für alle hinreichend grossen s aus \mathfrak{F} diese rationale Zahl nicht Null ist nach (30), so folgt die Ungleichung

$$|R_{\tau_1 \dots \tau_{k-1} 0}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \dots, z_k^{(s)})| \geq \frac{1}{M},$$

und folglich muss wegen (16) für alle hinreichend grossen s aus \mathfrak{F}

$$|R_{\tau_1 \dots \tau_{k-1} 0}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \dots, z_k^{(s)})| \geq q(l_k; s, r_k)^{-(1+\varepsilon)^2 r_k} \dots \quad (B)$$

sein.

Offenbar widersprechen (A) und (B) einander wegen der ersten Ungleichung (28), sobald s und damit $q(l_k; s, r_k)$ eine gewisse Grenze übersteigt: Die in § 1 gemachte Existenzannahme ist also falsch und Satz 2 muss wahr sein.

KAPITEL 2.

Beweis von Satz 3.

§ 9. *Ersetzung von ζ durch eine algebraische Zahl höheren Grades.*

Sei ζ eine von Null verschiedene und sogar ohne Einschränkung der Allgemeinheit positive algebraische Zahl n -ten Grades; seien ferner

$$P_1, P_2, \dots, P_t \text{ und } Q_1, Q_2, \dots, Q_u$$

$t+u$ ungleiche Primzahlen. Wir betrachten Brüche p/q , deren Zähler

$$p = P_1^{h_1} P_2^{h_2} \dots P_t^{h_t} \dots \dots \dots \quad (31)$$

ein reines Potenzprodukt der Zahlen P_i und deren Nenner

$$q = Q_1^{k_1} Q_2^{k_2} \dots Q_u^{k_u} \dots \dots \dots \quad (32)$$

ein reines Potenzprodukt der Zahlen Q_v ist, die ζ möglichst gut approximieren; nur werde im Ausnahmefall, dass ζ rational ist, der höchstens einzelne Bruch dieser Form, der genau gleich ζ ist, ausgeschlossen.

Bedeute r eine sehr grosse Primzahl. Wegen (31) und (32) lassen sich p und q in der Form

$$p = p_0 p_1^r, \quad q = q_0 q_1^r. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (33)$$

schreiben, wo

$$p_0 = P_1^{h_1 - \left[\frac{h_1}{r} \right] r} \dots P_t^{h_t - \left[\frac{h_t}{r} \right] r}, \quad q_0 = Q_1^{k_1 - \left[\frac{k_1}{r} \right] r} \dots Q_u^{k_u - \left[\frac{k_u}{r} \right] r}$$

und

$$p_1 = P_1^{\left[\frac{h_1}{r} \right]} \dots P_t^{\left[\frac{h_t}{r} \right]}, \quad q_1 = Q_1^{\left[\frac{k_1}{r} \right]} \dots Q_u^{\left[\frac{k_u}{r} \right]}$$

ist; p_0 und q_0 können hiernach also nur eine endliche, allein von r abhängige Anzahl von Werten annehmen. Bedeutet

$$Z = \sqrt[r]{\frac{q_0}{p_0} \zeta}$$

den reellen Wert dieser Wurzel, so hat folglich auch Z nur eine endliche, allein von r abhängige Anzahl von Möglichkeiten und ist überdies algebraisch genau vom Grad $n r$. Die anderen Werte des Wurzelzeichens sind nichtreell. Wegen

$$\frac{p}{q} - \zeta = \frac{p_0}{q_0} \frac{\left(\frac{p_1}{q_1} \right)^r - Z^r}{\frac{p_1}{q_1} - Z} \left(\frac{p_1}{q_1} - Z \right)$$

konvergiert $\frac{p_1}{q_1}$ gegen Z , wenn $\frac{p}{q}$ gegen ζ strebt; gleichzeitig konvergiert

$$\frac{\left(\frac{p_1}{q_1} \right)^r - Z^r}{\frac{p_1}{q_1} - Z}$$

gegen r . Folglich ist für alle hinreichend nahe bei ζ liegenden Brüche $\frac{p}{q}$

$$\left| \frac{p}{q} - \zeta \right| \geq c_r \left| \frac{p_1}{q_1} - Z \right|, \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (34)$$

wo c_r eine positive Konstante bezeichnet, die nur von r abhängt. Außerdem ist offenbar auch

$$q \leq c'_r q_1^r. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (35)$$

wo c'_r ebenfalls nur von r abhängt und positiv ist.

§ 10. *Abschluss des Beweises: Anwendung des SIEGELSchen Satzes.*

Da Z algebraisch vom Grad nr ist, so hat nach dem THUE-SIEGELSchen Satz in der SIEGELSchen Verschärfung ⁴⁾ die Ungleichung

$$\left| \frac{p_1}{q_1} - Z \right| \leq C q_1^{-2} \sqrt{nr}.$$

für jede positive Konstante C nur endlichviele Lösungen in gekürzten Brüchen $\frac{p_1}{q_1}$, wobei die Primteiler von p_1 und q_1 sogar gar keiner Beschränkung unterworfen sind. Wählen wir

$$C = \epsilon_r^{-1} \epsilon_r'^{-2} \sqrt{\frac{n}{r}},$$

und beachten wir die beiden Ungleichungen (34) und (35), berücksichtigen wir ferner, dass Z eine allein von r abhängige Anzahl verschiedener Werte haben kann, so folgt also, dass die Ungleichung

$$\left| \frac{p}{q} - \zeta \right| \leq q^{-2} \sqrt{\frac{n}{r}}$$

nur endlichviele Lösungen p/q mit Zählern und Nennern der Form (31) und (32) haben kann. Da $2 \sqrt{\frac{n}{r}}$ für grosses r beliebig klein ist, folgt damit Satz 3.

§ 11. *Anwendung von Satz 2 und Satz 3 auf die Kettenbruch-Näherungsbrüche einer algebraischen Irrationalzahl.*

Sei von jetzt ab ζ eine reelle algebraische Irrationalzahl,

$$\zeta = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots$$

ihr regelmässiger Kettenbruch, und

$$\frac{p_{-1}}{q_{-1}}, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$$

die Folge der zugehörigen Kettenbruch-Näherungsbrüche. Nach dem LIOUVILLEschen Satz oder auch nach dem THUEschen Satz liegen die Quotienten

$$\frac{\log q_{r+1}}{\log q_r}$$

von $r=2$ ab alle unterhalb einer Konstanten. Man kann also Satz 2 anwenden und erhält folgendes Resultat:

⁴⁾ Siehe die Arbeit ²⁾. Die Beweismethode in § 9—10 ist nicht neu und stammt von C. SIEGEL, der sie mir vor etwa 10 Jahren mitteilte. Auch Satz 3 selbst ist wohl nicht neu, doch konnte ich ihn nirgends explizit formuliert finden.

„Es gibt eine unendliche Teilfolge

$$\frac{p_{r_1}}{q_{r_1}}, \frac{p_{r_2}}{q_{r_2}}, \frac{p_{r_3}}{q_{r_3}}, \dots$$

von Kettenbruch-Näherungsbrüchen an ζ , so dass mit wachsendem Index die grösste im Nenner aufgehende Primzahl über alle Grenzen wächst“.

Zum Beweis genügt es, $\mu = 2$ zu nehmen und zu beachten, dass

$$\left| \frac{p_r}{q_r} - \zeta \right| < q_r^{-2}$$

ist.

Ersetzt man ζ durch $\frac{1}{\zeta}$, so gelangt man im Fall $\zeta \neq 0$ zu einem analogen Satz für die Näherungs-Zähler; ferner kann man ein ähnliches Resultat auch für die Ausdrücke

$$ap_r + bq_r$$

aussprechen, wenn a und b irgend zwei ganze rationale Zahlen bedeuten.

Wendet man auf die Näherungsbrüche nicht Satz 2, sondern Satz 3 an und zwar ebenfalls mit dem Wert $\mu = 2$, so ergibt sich:

„Mit wachsendem Index strebt die grösste in $p_r q_r$ aufgehende Primzahl gegen Unendlich“.

Nachtrag: Zur Einleitung dieser Arbeit ist nachzutragen, dass die SCHNEIDERsche Arbeit unter dem Titel: „Ueber die Approximation algebraischer Zahlen“ in Band 175 des Journals für die reine und angewandte Mathematik etwa im Juli dieses Jahres erscheint.

Es werde ferner erwähnt, dass die Sätze 1 und 2 einer Verallgemeinerung auf endliche Systeme algebraischer Zahlen fähig sind (bei Satz 3 ist die entsprechende Verallgemeinerung trivial). Z.B. gilt statt Satz 1 folgender allgemeinere Satz:

„Sei $\mu > 2$ eine Konstante; seien ferner $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ endlichviele algebraische Zahlen und

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \dots \quad (2 \leq q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \dots)$$

unendlichviele gekürzte oder ungekürzte Brüche mit wachsendem positiven Nenner, die der Ungleichung

$$\min_{r=1,2,\dots,N} \left(\left| \frac{p_r}{q_r} - \zeta_r \right| \right) \leq q_r^{-\mu}$$

genügen. Dann ist

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\log q_{\lambda+1}}{\log q_{\lambda}} = \infty$$

Eine analoge Verallgemeinerung gilt für Satz 2. Man zeigt diese beiden Sätze mit denselben Hilfsmitteln wie in dieser Arbeit und zwar fast ohne Änderung des Beweises.

Groningen, 7. März 1936.

**Mathematics. — Eine Klasse von Ringen im Hilbertschen Raum. By
HANS FREUDENTHAL. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)**

(Communicated at the meeting of May 23, 1936.)

1. (a) \mathfrak{R} sei ein separabler reeller euklidischer Raum (Elemente: a, b, c, d, e ; reelle Zahlen: kleine griechische Buchstaben); es gebe also in \mathfrak{R} ein inneres Produkt mit den üblichen Eigenschaften und die zugehörige starke Topologie.

(b) \mathfrak{R} sei ein kommutativer einseitig topologischer Ring ($\lim_n ab_n = a \lim_n b_n$).

(c) $|ab| \leq \delta_a |b|$ unabhängig von b .

(d) $(ca, b) = (a, cb)$.

2. Wir vervollständigen \mathfrak{R} metrisch zu einem reellen Hilbertschen Raum \mathfrak{H} (Elemente: x, y).

H_a sei der überalldicht definierte beschränkte (wegen 1c) Hermitesche (wegen 1d) lineare Operator, der $x \in \mathfrak{R}$ überführt in $ax \in \mathfrak{R}$; $H_a x = ax$.

H_a lässt sich stetig auf ganz \mathfrak{H} fortsetzen. Das deuten wir so: ax wird sinnvoll für alle $a \in \mathfrak{R}$, $x \in \mathfrak{H}$. Man sieht, dass dabei alle vom Produkt geforderten Eigenschaften erhalten bleiben (in 1c tritt x für b ein, in 1d tritt x für a , y für b ein).

Weiter dehnen wir die Definition des Produktes so aus, dass wir,

$$\left. \begin{array}{l} \text{falls } \lim_n a_n \text{ und (für alle } x \text{) } \lim_n a_n x \text{ existieren,} \\ \lim_n a_n \in \overline{\mathfrak{R}} \text{ , } (\lim_n a_n) x = \lim_n a_n x \text{ setzen.} \end{array} \right\} \quad (*)$$

$\overline{\mathfrak{R}}$ ist linear, und die erweiterte Multiplikation erfüllt alle Bedingungen aus 1 (insbesondere gelten b und c, weil eine konvergente Folge gleichmäßig beschränkter linearer Operatoren in einem linearen Raum einen ebenso beschränkten Limes besitzt). Elemente von $\overline{\mathfrak{R}}$ werden wie die von \mathfrak{R} bezeichnet.

Ein in \mathfrak{H} überall definierter Operator H heisze *realisierbar*, wenn $a \in \overline{\mathfrak{R}}$ mit $Hx = ax$ (identisch in $x \in \mathfrak{H}$) existiert; wir setzen dann $H = H_a$.

3. Wir suchen eine „realisierbare Spektraldarstellung“ für die H_a . Wir betrachten ein $a \in \overline{\mathfrak{R}}$ mit $\delta_a \leq 1$ (das ist keine Einschränkung, da sich diese Normierung durch Multiplikation mit einer reellen Zahl stets erreichen lässt).

Wenn wir jetzt von Polynomen sprechen, so meinen wir stets solche

ohne konstantes Glied (nur solche lassen sich auf Elemente von $\bar{\mathcal{R}}$ anwenden, da wir in \mathcal{R} keine Eins angenommen haben).

Für $a > 0$ definieren wir

$$\varphi_\alpha(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \tau \leq a \\ 1 - \frac{a}{\tau} & \text{wenn } \tau \geq a \end{cases}$$

In $-1 \leq \tau \leq 1$ lässt sich $\varphi_\alpha(\tau)$ gleichmäig durch Polynome $\varphi_{\alpha,n}(\tau)$ approximieren. Man weisz, dasz $\lim_n \varphi_{\alpha,n}(H_a)$ gleichmäig existiert. Jedenfalls existiert also $\lim_n \varphi_{\alpha,n}(a)x$, speziell also $\lim_n \varphi_{\alpha,n}(a)a$.

Wir setzen $\psi_\alpha = \tau \varphi_\alpha$, $\psi_{\alpha,n} = \tau \varphi_{\alpha,n}$. Dann existiert erstens $\lim_n \psi_{\alpha,n}(a)$, zweitens (wegen der gleichmäigigen Konvergenz von $\psi_{\alpha,n}(\tau)$, $-1 \leq \tau \leq 1$) auch $\lim_n \psi_{\alpha,n}(H_a)$, also sicher (für alle x) $\lim_n \psi_{\alpha,n}(a)x$. Wegen (*) ist daher $\lim_n \psi_{\alpha,n}(a) \in \bar{\mathcal{R}}$, also $\psi_\alpha(H_a)$ realisierbar (durch $\psi_\alpha(a) = \lim_n \psi_{\alpha,n}(a)$).

Ist H_a spektraldargestellt,

$$H_a = \int_{-1}^{+1} \lambda dE_{\lambda,a},$$

so ist

$$\psi_\alpha(H_a) = \int_{-1}^{+1} \psi_\alpha(\lambda) dE_{\lambda,a}$$

realisierbar durch $\psi_\alpha(a)$.

Sei $0 < \beta < \gamma$. Wir setzen $\frac{\psi_\beta - \psi_\gamma}{\gamma - \beta} = \chi_{\beta,\gamma}$ und $\eta_\gamma = \lim_n \chi_{\beta,\gamma}^n$. Dann ist

$$\eta_\gamma = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \tau < \gamma \\ 1 & \text{wenn } \tau \geq \gamma \end{cases}$$

Man hat für alle x

$$\lim_n \chi_{\beta,\gamma}^n(H_a)x = \eta_\gamma(H_a)x = (1 - E_{\gamma,a})x,$$

also erstens die Existenz von $\lim_n \chi_{\beta,\gamma}^n(a)x$, also speziell die von $\lim_n \chi_{\beta,\gamma}^n(a)\chi_{\beta,\gamma}(a)$, also zweitens die von $\lim_n \chi_{\beta,\gamma}^n(a) (= \eta_\gamma(a))$. Wegen (*) ist $\eta_\gamma(a) \in \bar{\mathcal{R}}$, und dies Element realisiert $1 - E_{\gamma,a}$. Wir haben also:

Ist $E_{\lambda,a}$ die Spektralschar von H_a , so ist (für $\lambda > 0$) $1 - E_{\lambda,a}$ realisierbar und (analog zu beweisen) (für $\lambda < 0$) $E_{\lambda,a}$ realisierbar.

4. Sei $0 < \beta < \gamma$. Wir setzen $\frac{\psi_\beta(a) - \psi_\gamma(a)}{\gamma - \beta} = a_{\beta,\gamma}$ und zeigen, dasz $\lim_{\beta \rightarrow 0} a_{\beta,\gamma}$ existiert (analoges gilt natürlich für $0 > \beta > \gamma$).

Man hat (für $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3$) $a_{\beta_1, \beta_2} + a_{\beta_2, \beta_3} = a_{\beta_1, \beta_3}$ und für zwei bis auf die Endpunkte zueinander fremde positive Intervalle $[\beta, \gamma]$ und $[\beta', \gamma']$: $a_{\beta, \gamma} a_{\beta', \gamma'} = 0$ (da dasselbe für die zugehörigen H , die Abschnitte der Spektralzerlegung von H_a , gilt). Aus der zweiten Gleichung folgt, wenn man in 1d ersetzt a durch $\eta_{\beta'}(a)$, b durch $a_{\beta, \gamma}$, c durch $a_{\beta', \gamma'}$: $(a_{\beta', \gamma'}, \eta_{\beta'}(a), a_{\beta, \gamma}) = 0$, also $(a_{\beta', \gamma'}, a_{\beta, \gamma}) = 0$. Um die behauptete Konvergenz zu erhalten, braucht man also nur die Konvergenz von $\sum_n |a_{\beta_n, \beta_{n+1}}|^2$ zu beweisen, wenn $\beta_n > 0$ eine monotone Nullfolge ist. Diese Summe existiert aber, weil alle Partialsummen $\equiv |a|^2$ sind.

5. Sei \mathfrak{E} die Gesamtheit der $e \in \overline{\mathfrak{N}}$ mit $e^2 = e$. Mit e_1, e_2 liegt auch $e_1 e_2$ in \mathfrak{E} , und, falls $e_1 e_2 = e_1$, auch $e_2 - e_1$; ferner (wie man durch eine ähnliche Ueberlegung wie die in 4 zeigt) mit jeder Menge aus \mathfrak{E} mit beschränkten $|e|$ auch ihr (dann existierendes) Produkt. Durch ungefähr dieselben Ueberlegungen wie die in einer früheren Note des Verf.¹⁾ kann man \mathfrak{E} als ein System von Teilmengen einer gewissen Menge deuten, wenn man den Durchschnitt von e_1 und e_2 durch $e_1 e_2$ und die Vereinigung durch $e_1 + e_2 - e_1 e_2$ deutet. Man erhält: \mathfrak{E} ist ein \mathfrak{E}_1 oder ein \mathfrak{E}_2 oder direkte „Summe“ eines \mathfrak{E}_1 und eines \mathfrak{E}_2 , wo \mathfrak{E}_1 erzeugt wird von endlich oder abzählbar unendlich vielen „minimalen“ e_n und alle Vereinigungen von e_{n_k} erhält, für die $\sum |e_{n_k}|^2$ konvergiert, und wo \mathfrak{E}_2 besteht aus allen Teilmengen endlichen Maszes eines endlichen oder unendlichen Intervalls (Teilmengen vom Masze null werden dabei wie leere Mengen behandelt).

6. Aus den Ergebnissen von 3 und 4 folgt wie üblich für $a \in \overline{\mathfrak{N}} (\delta_a \equiv 1)$ die Integraldarstellung

$$a = \int_0^1 (\lambda - 1) de_\lambda + \int_0^1 (1 - \lambda) de'_\lambda; \quad (*)$$

hier ist e_λ und $e'_\lambda \in \mathfrak{E}$ definiert für alle λ , $0 \leq \lambda < 1$ (für $\lambda = 1$ ist der zugehörige Projektionsoperator nicht notwendig realisierbar) und e_λ und e'_λ sind Spektralscharen, $e_\lambda e_\mu = e_\lambda$, $e'_\lambda e'_\mu = e'_\lambda$ (für $\lambda \leq \mu$), $e_0 = e'_0 = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow 1} (e_\lambda + e'_\lambda) x = x$.

Analog den Betrachtungen in 4 sieht man, dass die rechte Seite von (*) dann und nur dann ein Element von $\overline{\mathfrak{N}}$ darstellt, wenn

$$\int_0^1 (1 - \lambda)^2 de_\lambda + \int_0^1 (1 - \lambda)^2 de'_\lambda$$

existiert.

¹⁾ Siehe diese Proceedings 39, 641—651 (1936), insbesondere 14, 12, 1—4.

7. Wie a.a.O. schlieszt man aus 5 und 6: \mathfrak{H} ist ein \mathfrak{H}_1 oder ein \mathfrak{H}_2 oder direkte Summe eines \mathfrak{H}_1 und eines \mathfrak{H}_2 . Dabei kann \mathfrak{H}_1 endlich oder unendlichdimensional sein. Im ersten Fall besteht \mathfrak{H}_1 aus den Systemen von k reellen Zahlen, das innere Produkt von (ξ_1, \dots, ξ_k) und (η_1, \dots, η_k) ist durch $\sum_{n=1}^k \varrho_n \xi_n \eta_n$ definiert (ϱ_n feste positive Zahlen) und das Produkt durch $(\xi_1 \eta_1, \dots, \xi_k \eta_k)$. Im zweiten Fall besteht \mathfrak{H}_1 aus den abzählbar unendlichen Folgen reeller Zahlen mit konvergentem $\sum \varrho_n \xi_n^2$, das innere Produkt und das Produkt sind ähnlich erklärt wie soeben (letztes nicht für alle Paare). \mathfrak{H}_2 besteht aus den im endlichen oder unendlichen Intervall definierten reellen Funktionen, für die $\int \varphi(\xi)^2 d\xi$ im Sinne von Lebesgue existiert, das innere Produkt von φ und ψ ist durch $\int \varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi$ erklärt, das Produkt (nicht für alle Paare) durch $\varphi(\xi) \psi(\xi)$. Summe usw. sind in allen Fällen in natürlicher Weise erklärt.

\mathfrak{R}_1 besteht aus den Elementen von \mathfrak{H}_1 , für die auch $\sum \xi_n^2$ existiert. \mathfrak{R}_2 aus denen von \mathfrak{H}_2 , die als Funktionen nach Vernachlässigung einer Menge vom Maß null beschränkt sind.

$\bar{\mathfrak{R}}$ ergibt sich als ein \mathfrak{R}_1 oder ein \mathfrak{R}_2 oder als direkte Summe eines \mathfrak{R}_1 und eines \mathfrak{R}_2 . Damit ist über \mathfrak{R} , das in $\bar{\mathfrak{R}}$ überall dicht liegt, alles gesagt, was sich überhaupt sagen lässt.

Man kann dies Ergebnis übrigens noch etwas anders aussprechen, wenn man die ϱ_n aus dem inneren Produkt in das Produkt hineintransformiert.

8. Auf Grund der vorstehenden Untersuchungen lässt sich die Gesamtheit der meszbaren Funktionen über dem endlichen oder unendlichen Intervall abstrakt einführen durch Adjunktion gewisser Operatoren zu \mathfrak{R} . Wir gehen darauf nicht näher ein.

Mathematics. — Zur Abstraktion des Integralbegriffs. By HANS FREUDENTHAL. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of May 23, 1936.)

In den letzten Jahren haben verschiedene Verfasser Verallgemeinerungen des Integralbegriffs formuliert, die sich bei allerlei Anwendungen als nötig erwiesen haben¹⁾. Diese Verallgemeinerungen reichen aber für die Bedürfnisse der Anwendungen noch nicht aus. Hier folgt eine Verallge-

¹⁾ Wir knüpfen hier an A. KOLMOGOROFF an [Math. Ann. 103, 654—682, (1930)].

meinerung, die, wie ich hoffe, vorläufig allen Ansprüchen genügen wird. Der Begriff des Limes längs teilweise geordneter Mengen, auf den wir uns stützen werden, wird vielleicht auch noch anderer Anwendungen fähig sein.

1. (1.1) μ und ν sollen im Folgenden immer alle natürlichen Zahlen durchlaufen, μ', ν', μ'', ν'' unendlich viel natürliche Zahlen. Folgen sollen immer abzählbar unendlich sein²⁾, Teilfolgen sollen ihre Anordnung immer der ganzen Folge entnehmen. \mathfrak{M} und \mathfrak{N} seien immer teilweise geordnete Mengen (Elemente m, n). Die Menge $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ der Elementepaare (m, n) , $m \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathfrak{N}$, sei stets so teilweise geordnet, dass $(m, n) \equiv (m', n')$ dann und nur dann gilt, wenn $m \equiv m'$, $n \equiv n'$. Ist \mathfrak{N} eine Menge von Teilmengen einer gewissen Menge, so sei „ \equiv “ die Inklusionsbeziehung.

(1.2) In \mathbf{A} (Elemente: α, β, γ) sei ein eindeutiger Limesbegriff gegeben; dabei lassen wir konvergente Folgen zu, die nur für fast alle Nummern erklärt sind. Wir werden einen Limesbegriff einführen für „Folgen“ α_n , $n \in \mathfrak{N}$, die übrigens nicht für alle n erklärt zu sein brauchen.

(1.3) Eine Teilfolge α_{n_ν} , $n_\nu \equiv n_{\nu+1}$, von α_n , $n \in \mathfrak{N}$, heißt Stammfolge, wenn für jede Folge n'_ν ($\equiv n'_{\nu+1}$), mit $n'_\nu \equiv n_\nu$, $\lim \alpha_{n'_\nu}$ existiert und denselben Wert hat. Mit α_{n_ν} ist dann auch $\alpha_{n'_\nu}$ Stammfolge, wenn $n'_{\nu+1} \equiv n'_\nu \equiv n_\nu$ für alle ν .

(1.4) (++)³⁾ In \mathfrak{N} (ebenso in \mathfrak{M}) gebe es zu je zwei Elementen eins, das \equiv den beiden ist.

(1.5) Je zwei Stammfolgen von α_n haben denselben Limes. (Klar.)

(1.6) Unter dem Stammlimes von α_n , $\lim_{n \in \mathfrak{N}} \alpha_n$ verstehen wir den Limes einer (also nach 1.5 aller) ihrer Stammfolgen.

2. An den Limesbegriff kann man verschiedene Forderungen stellen.

(2.1) (+) Für jede gewöhnliche Folge ziehe die Existenz des Limes die des Stammlimes und die Gleichheit beider nach sich. — Das ist sicher erfüllt, sobald gilt:

(2.1') (+) Mit irgend einer Folge konvergiert auch jede Teilfolge nach demselben Limes.

(2.2) (+) Für jede gewöhnliche Folge ziehe die Existenz des Stammlimes die des Limes und die Gleichheit beider nach sich. — Das ist sicher erfüllt, sobald gilt:

(2.2') (+) Kann man aus jeder Teilfolge von α_ν eine nach α konvergente Teilfolge ausziehen, so konvergiert α_ν nach α . — Denn dann hat man, wenn $\alpha_{\nu'}$ eine Stammfolge und $\alpha_{\nu''}$ irgendeine Teilfolge von α_ν ,

²⁾ Auf transfinite Folgen lässt sich alles ohne Mühe übertragen.

³⁾ (+) hinter der Nummer kennzeichnet eine axiomatische Forderung, die nur da vorausgesetzt wird, wo sie ausdrücklich erwähnt ist; (++) eine, die im weiteren Verlauf immer vorausgesetzt wird.

ist, zu jedem ν' ein $\mu'(\nu') \equiv \nu'$, und es existiert $\lim_{\nu'} a_{\mu'(\nu')} = \lim_{\nu'} a_{\nu'}$, also $\lim a_{\nu} = \lim a_{\nu'}$.

(2.3) Man bemerkt übrigens, dasz (2.1) und (2.2) zusammen (2.1') nach sich ziehen.

(2.4) (+) Existiert $\underset{\mu}{\text{slim}} \underset{\nu}{\text{slim}} a_{\mu\nu}$, so existiert $\underset{(\mu, \nu)}{\text{slim}} a_{\mu\nu}$, und beide sind gleich.⁴⁾

(2.5) (+) Existiert $\underset{(\mu, \nu)}{\text{slim}} a_{\mu\nu} = a$ und $\underset{\nu}{\text{slim}} a_{\mu\nu} = a_{\mu}$, so auch $\underset{\mu}{\text{slim}} a_{\mu} = a$.

(2.6) Unter gewissen Voraussetzungen, auf die wir nicht eingehen wollen, genügt es, 2.4 und 2.5 allein für den Fall vorauszusetzen, dasz \mathfrak{M} und \mathfrak{N} die Folge der natürlichen Zahlen ist, um sie allgemein beweisen zu können. — Uebrigens sind in metrischen Räumen alle unsere Forderungen ohne weiteres erfüllt.

(2.7) Die Folge $n_{\nu} (\equiv n_{\nu+1})$ „schöpft \mathfrak{N} aus“, wenn zu jedem $n \in \mathfrak{N}$ ein ν mit $n_{\nu} \equiv n$ existiert.

(2.8) \mathfrak{N} besitze eine ausschöpfende Folge; es gelte 2.2. Dann sind die Aussagen „ $\underset{n \in \mathfrak{N}}{\text{slim}} a_n = a$ “ und „ $\underset{\nu}{\text{lim}} a_{n_{\nu}} = a$ für jede ausschöpfende Folge“

äquivalent; falls eine Stammfolge existiert, ist jede Teilfolge mit ausschöpfender Indexfolge Stammfolge. — Denn sei $\underset{n}{\text{slim}} a_n = a$, n_{ν} eine ausschöpfende Folge und $a_{n_{\nu}}$ eine Stammfolge. Dann gibt es eine Teilfolge n''_{ν} von n_{ν} mit $n''_{\nu} \equiv n'_{\nu}$. Also ist $a_{n''_{\nu}}$ Stammfolge von $a_{n_{\nu}}$, also (nach 2.2) $\underset{\nu}{\text{lim}} a_{n_{\nu}} = a$. — Andererseits ist mit irgendeiner Folge auch jede „größere“ ausschöpfend; die zweite Aussage zieht also nach sich, dasz eine ausschöpfende Folge eine Stammfolge liefert. — Schlieslich ergibt sich der Rest ähnlich wie der erste Teil der Behauptung.

(2.9) Ist \mathfrak{N} eine endliche Menge oder die Menge der endlichen Mengen natürlicher Zahlen, so besitzt \mathfrak{N} ausschöpfende Folgen. (Klar.)

(2.10) Besitzen \mathfrak{M} und \mathfrak{N} ausschöpfende Folgen, so auch $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. (Klar.)

(2.11) Besitzen \mathfrak{M} und \mathfrak{N} ausschöpfende Folgen und gilt 2.2, so folgen 2.4 und 2.5 aus ihrer abgeschwächten Formulierung 2.6. (Folgt aus 2.8.) Das ist deswegen wichtig, weil wir 2.4 und 2.5 nur für den Fall verwenden werden, dasz \mathfrak{M} und \mathfrak{N} der Voraussetzung von 2.9 genügen.

3. (3.1) (+) In \mathbf{A} gebe es eine kommutative, assoziative und stetige Addition.⁵⁾

(3.2) Ist $a_{\nu} \in \mathbf{A}$ für alle ν definiert, so verstehe man unter $\sum_{\nu} a_{\nu}$ den

⁴⁾ Siehe zu dieser und den andern Anforderungen an den Limesbegriff: GARRET BIRKHOFF, Annals of Math. (2) 35, 861—875 (1934).

⁵⁾ Wir verzichten auf die übrigen Gruppeneigenschaften, erstens weil es z.B. im Gebiet der reellen Zahlen nützlich ist, $+\infty$ oder $-\infty$ als eine Zahl aufzufassen (man braucht dann unendliche Integralwerte nicht besonders zu erklären), zweitens um uns den wichtigen Schritt 3.6 nicht zu versperren.

$\lim_{n \in \mathfrak{N}} \beta_n$, wo \mathfrak{N} die Menge aller endlichen Mengen ν_1, \dots, ν_x bedeute und $\beta_n = a_{\nu_1} + \dots + a_{\nu_x}$ gesetzt sei. Ist a_ν nur für $\nu = 1, \dots, x$ erklärt, so sollen $\lim \Sigma$ und Σ^* dasselbe bedeuten. — Die Definition von Σ^* kommt im Wesentlichen auf die der unbedingten Konvergenz hinaus.

(3.3) Ist $\Sigma^* a_\nu = a$ und $\Sigma^* a'_\nu = a'$ so ist $\Sigma^* a''_\nu = a + a'$, wenn $a''_{2\nu-1} = a_\nu$ und $a''_{2\nu} = a'_\nu$ gesetzt ist. (Folgt aus der Stetigkeit der Addition.)

(3.4) Gilt 2.4, so folgt aus der Existenz von $\sum_{\mu} \sum_{\nu} a_{\mu\nu}$ die von $\sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu}$ und die Gleichheit beider. (Klar nach 3.3.)

(3.5) Gilt 2.5, und ist $\sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} = a$, $\sum_{\nu} a_{\mu\nu} = a_\mu$, so ist $\sum_{\mu} a_\mu = a$.

(Klar nach 3.3.)

(3.6) Unter [A] verstehe man die Menge der nichtleeren Teilmengen von A (Elemente von [A] ebenfalls in eckigen Klammern), in der es einen Limesbegriff (abhängig von dem in A) gebe, bei dem die Addition eine stetige Operation sei; unter $[a] + [\beta]$ verstehe man dabei die Menge der $a + \beta$ mit $a \in [a]$, $\beta \in [\beta]$. — Wie der Limesbegriff in A von dem in A abhängt, ist für das folgende gleichgültig; man wird aber mindestens verlangen: Ist $\lim [a_\nu] = [a]$, so ist $a \in [a]$ dann und nur dann, wenn $a_\nu \in [a_\nu]$ so existieren, dass $\lim a_\nu = a$.⁶⁾

4. (4.1) (++) \mathfrak{A} (Elemente: $(a, b, c, \varrho, \mathfrak{a})$) sei eine teilweise geordnete Menge; es gebe in \mathfrak{A} ein kleinstes Element ϱ und zu je zwei Elementen a und b ein grösstes Element $c = a \wedge b$ mit $c \leqq a$, $c \leqq b$.

(4.1.2) (+) Ist für jedes c mit $a \wedge c \neq \varrho$ auch $b \wedge c \neq \varrho$, so ist $a \leqq b$.

(4.2) Unter einer Zerlegung von a verstehen wir eine endliche oder abzählbar unendliche Menge $\{a_\varrho\}$ mit den folgenden Eigenschaften: 1. $a_\varrho \neq \varrho$. 2. $a_\varrho \wedge a_\sigma = \varrho$. 3. $a_\varrho \leqq a$. 4. Zu jedem b mit $a \wedge b \neq \varrho$ gibt es ein ϱ mit $a_\varrho \wedge b \neq \varrho$. $\mathfrak{B}(a)$ sei die Menge der Zerlegungen von a ⁷⁾.

(4.3) Ist $\{a_\varrho\} \in \mathfrak{B}(a)$ und $b < a$, so ist $\{a_\varrho \wedge b\} \in \mathfrak{B}(b)$. — Nur 4.2.3 bedarf eines Beweises: Sei $c' = c \wedge b \neq \varrho$, dann ist $c' \wedge a \neq \varrho$, also für ein geeignetes ϱ : $c' \wedge a_\varrho \neq \varrho$, $c \wedge (b \wedge a_\varrho) \neq \varrho$.

(4.4) Ist $\{a_\varrho\} \in \mathfrak{B}(a)$ und für jedes feste ϱ auch $\{a_{\varrho\sigma}\} \in \mathfrak{B}(a_\varrho)$, so ist $\{a_{\varrho\sigma}\} \in \mathfrak{B}(a)$.

(4.5) Gilt 4.1.2 und ist (für jedes feste ϱ) $\{a_{\varrho\sigma}\} \in \mathfrak{B}(a_\varrho)$ und ferner $\{a_{\varrho\sigma}\} \in \mathfrak{B}(a)$, so ist $\{a_\varrho\} \in \mathfrak{B}(a)$. — Wir brauchen 4.1.2, um 4.2.3 zu beweisen: ist $a_\varrho \wedge c \neq \varrho$, so ist (für ein geeignetes σ) $a_{\varrho\sigma} \wedge c \neq \varrho$, also $a \wedge c \neq \varrho$, woraus nach 4.1.2 die Behauptung folgt.

(4.6) $\mathfrak{z}(a) \equiv \mathfrak{z}'(a)$ bedeute: jedes Element von \mathfrak{z} ist \equiv einem geeigneten von \mathfrak{z}' .

⁶⁾ Wenn der Limes existiert, soll er also gleich dem unteren abgeschlossenen Limes [F. HAUSDORFF, Mengenlehre, § 28, 2 (1927)] sein.

⁷⁾ Für manche Zwecke wäre es übrigens nützlich, an den Begriff „Zerlegung“ noch weitere Forderungen stellen zu dürfen (z.B. Endlichkeit). Wir gehen darauf nicht näher ein.

(4.7) Zu je zwei Elementen von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{a})$ gibt es eins, das \equiv beiden ist. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{a})$ ist also ein \mathfrak{N} im Sinne von 1.4. (Klar nach 4.3 und 4.4.)

5. (5.1) Die Funktion φ ordne jedem von \mathfrak{o} verschiedenen Element von \mathfrak{A} ein Element von \mathfrak{A} zu.

(5.2) $\varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ bedeute $\sum_{\mathfrak{e}} \varphi(\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}})$ (siehe 3.2), wo $\{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}}\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{a})$ ist.

$\int_{\mathfrak{a}} \varphi(d\mathfrak{x})$ bedeute $\text{slim}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{a})} \varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ (siehe 4.7 und 1.6.)

(5.3.1) Ist $\{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}\sigma}\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}})$, $\{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}}\}$ eine endliche Zerlegung von \mathfrak{a} , $\{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}\sigma}\} = \mathfrak{z}'(\mathfrak{a})$ (siehe 4.4), so ist $\varphi(\mathfrak{z}'(\mathfrak{a})) = \sum_{\mathfrak{e}} \varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}}))$, d.h., falls die rechte Seite existiert, existiert die linke. (Klar nach 3.3.)

(5.3.2) Ist $\{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}}\}$ eine endliche Zerlegung von \mathfrak{a} , so ist $\int_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{e}} \int_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}}}$,

d.h., wenn die rechte Seite existiert, existiert die linke. (Klar.)

(5.4.1) Gilt 2.4 und ist $\{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}\sigma}\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}})$, $\{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}}\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ und $\{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}\sigma}\} = \mathfrak{z}'(\mathfrak{a})$ (siehe 4.4), so ist $\varphi(\mathfrak{z}'(\mathfrak{a})) = \sum_{\mathfrak{e}} \varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}}))$, d.h., falls die rechte Seite existiert, existiert die linke. (Klar nach 3.4.)

(5.4.2) Gilt 2.4 und ist $\{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}}\} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{a})$, so ist $\int_{\mathfrak{a}} \varphi(d\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{e}} \int_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}}} (d\mathfrak{x})$, d.h.,

falls die rechte Seite existiert, existiert die linke. (Klar.)

(5.5.1) Gilt 2.5 und 4.1.2, so gilt das Ergebnis von 5.4.1 in dem Sinne, dass aus der Existenz der φ die der rechten Seite folgt. (Klar nach 3.5 und 4.5.)

(5.5.2) Gilt 2.5 und 4.1.2, so gilt das Ergebnis von 5.4.2 in dem Sinne, dass aus der Existenz der Integrale die der Summe folgt.

(5.6.1) Ist $\varphi(\mathfrak{a}) = \varphi'(\mathfrak{a}) + \varphi''(\mathfrak{a})$, so ist $\varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{a})) = \varphi'(\mathfrak{z}(\mathfrak{a})) + \varphi''(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$, d.h., wenn die rechte Seite existiert, existiert die linke. (Klar nach 3.3.)

(5.6.2) $\int (\varphi' + \varphi'') = \int \varphi' + \int \varphi''$, d.h., wenn die rechte Seite existiert, existiert die linke. (Klar.)

(5.7) Jeder stetige Homomorphismus (Automorphismus) von \mathfrak{A} ist mit dem Integralzeichen vertauschbar. (Klar.)

6. (6.1) (++) Es liegen jetzt drei Systeme $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ mit den Eigenschaften von \mathfrak{A} vor; und es gebe zu je zwei Elementen $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{A}'$ ein distributives stetiges „Produkt“ in \mathfrak{A}'' . \mathfrak{A} sei eine Menge von Teilmengen einer Menge \mathfrak{P} (Elemente p). f ordne einem Element von \mathfrak{P} ein Element von \mathfrak{A}' zu; μ ordne einem Element ($\neq 0$) von \mathfrak{A} ein Element von \mathfrak{A} zu, und es sei $\mu(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{e}} \mu(\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}})$, wenn $\{\mathfrak{a}_{\mathfrak{e}}\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

(6.2) $\int_{\mathfrak{a}} f(p) \mu(d\mathfrak{x})$ bedeute $\int_{\mathfrak{a}} \varphi(d\mathfrak{x})$; dabei sei $\varphi(\mathfrak{x})$ die Menge $f(\mathfrak{x})$ der

$f(p)$ mit $p \in \mathfrak{X}$, multipliziert mit $\mu(\mathfrak{X})$. Man beachte, dass $f(\mathfrak{X}) \in [\mathbf{A}']$ ist und $\varphi(\mathfrak{X}) \in [\mathbf{A}'']$ (siehe 3.6). \int ist also ein Element von $[\mathbf{A}'']$; enthält dies Element genau ein Element von \mathbf{A}'' , so schreibe man einfach \int .

(6.3—7) Es bereitet jetzt keine Schwierigkeit, die Sätze von 5.3—7 zu übertragen; wir verzichten auf die explizite Formulierung.

7. Man kann im abstrakten Aufbau nun noch einen Schritt weiter zum gewöhnlichen Integral gehen, indem man von $\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{A}''$ noch fordert: die Existenz einer Null, die Existenz teilweiser Ordnungen in den $\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{A}''$ (insbesondere des Begriffes „positiv“), die untereinander und mit den Topologien in gewissen naheliegenden Beziehungen stehen, Positivität und Monotonie von $\mu(\mathfrak{X})$. Wir führen auch das nicht näher aus.

Meteorology. — *Meteorologisches zu den 3 holländischen Karakorum-Expeditionen.* I. Von W. BLEEKER. (Communicated by Prof. E. VAN EVERDINGEN).

(Communicated at the meeting of May 23, 1936).

Einleitung.

Es liegen von drei holländischen Karakorum-Expeditionen (Leiter: dr. PH. C. VISSER) dreimaltägliche einfache meteorologische Beobachtungen vor (meistens von 7, 14 und 21 Uhr), welche nicht in extenso, sondern zusammenfassend veröffentlicht werden sollen.

Die meisten benutzten meteorologischen Instrumente sind von der Königlichen Niederländischen Geographischen Gesellschaft (Amsterdam) und dem Königlichen Niederländischen Meteorologischen Institute (De Bilt in der Nähe von Utrecht) den Expeditions-Mitgliedern leihweise zur Verfügung gestellt und im Laboratorium des letzteren Institutes kontrolliert und geeicht worden. Im allgemeinen haben Hypsometer, Barometer, Thermometer, Psychrometer und Anemometer gut funktioniert, gelegentlich sind sie auch in Indien mit den Instrumenten der offiziellen Institute verglichen worden. Wo Zweifel an der Realität der Beobachtungsergebnisse auftrat, wurden diese bei der Mittelrechnung ausgeschaltet.

Die Messreihen der drei Expeditionen beziehen sich auf folgende Zeitabschnitten:

- I: 25. Juni 1922 — 1. Oktober 1922,
- II: 29. Mai 1925 — 7. Oktober 1925,
- III: 7. Juni 1929 — 28. Juli 1930.

Die Ergebnisse der Monate Juni, Juli, August und September sind für die 3 Expeditionen gesondert und zusammengefasst bearbeitet. Selbstverständlich darf man keinen zu grossen Wert auf die Ergebnisse der

einzelnen Expeditionen legen. Die Höhenunterschiede in den bereisten Gebieten sind sehr gross, sodass von den verschiedenen Niveaus nur wenige Messungen zur Verfügung stehen.

Um schnell und ohne langwierige Rechenarbeit eine Uebersicht über die Temperatur- en Feuchtigkeits-Verhältnisse zu bekommen, wurde in folgender Weise verfahren:

Ausgehend von einem mittleren Luftdruck von 501 mm in Leh in 3500 m Höhe¹⁾ wurde mit Hilfe einiger vorläufigen Temperatur- und Feuchtigkeits-Bestimmungen der mittlere Luftdruck in 3250, 3750, 4250 u.s.w. Meter Höhe berechnet. Zur Bestimmung der Temperatur, des Dampfdruckes und der relativen Feuchtigkeit in einem gewissen Niveau wurden alle Beobachtungen herangezogen, deren Luftdruckwerte zwischen jenen des um 250 m tieferen und um 250 m höheren Niveaus lagen. So sind z.B. für 3500 m alle Werte mit einem Luftdruck zwischen 517 und 486 mm verwendet worden, für 4000 m alle jene zwischen 486 und 458 mm u.s.w.

Ideal ist diese Bearbeitungsmethode keineswegs; aber auch eine sorgfältigere Bearbeitung könnte bei dem dürftigen Material doch nur einen ersten Einblick vermitteln.

Die Ergebnisse sind in Tabellenform am Schluss dieser Arbeit beigegeben.

Eine Uebersicht der wichtigsten Gebirge u.s.w. gibt Figur 1.

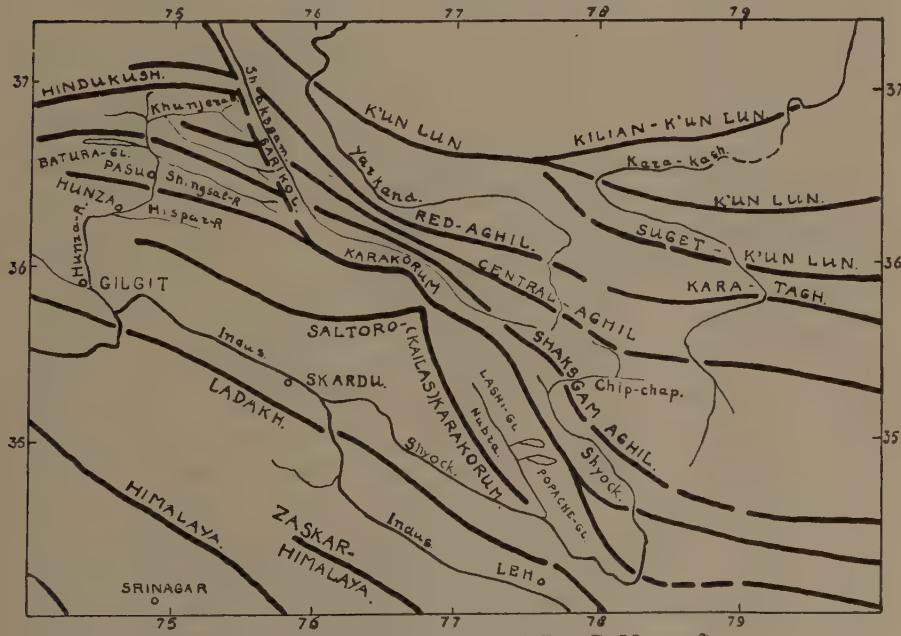


Fig. 1. Gebirgsketten u.s.w. nach PH. C. VISSER²⁾.

¹⁾ Meteorological Memoirs, Vol. XVII, 1904.

²⁾ PH. C. VISSER und JENNY VISSER-HOOFT: Wissenschaftliche Ergebnisse der Niederländischen Expeditionen in den Karakorum und angrenzende Gebiete in den Jahren 1922, 1925 und 1929—1930. Band I. Leipzig 1935.

I. *Temperatur.*

Die Temperaturmessungen der ersten Expedition sind mittels eines Schleuderthermometers, jene der zweiten und dritten Expedition mittels eines ASSMANN-Thermometers gemacht worden. Ein Vergleich der drei Expeditionen nach den Tabellen 1 bis 16 lehrt folgendes (Ziffern in Klammern geben die Anzahlen der Beobachtungen):

Juni. Die zweite Expedition hat sich in diesem Monat im Hunza- und Khunjerab-Tal, nördlich von der Karakorum-Kette und südöstlich vom Hindu Kush bewegt. III befand sich im Jahre 1929 im Nubra-Tal und in der Umgebung des Northern Te Rong Gletschers, im Jahre 1930 zog III vom östlichen Aghil zum Shyock-Fluss. Die Gebiete von III (1929) und III (1930) sind nur 50 bis 100 km von einander entfernt, II befindet sich 300 bis 400 km westlich davon.

Im allgemeinen (siehe Tabelle 4) scheinen die Temperaturen im Hunza-Gebiet ungefähr gleich gross zu sein wie die im weiter östlich gelegenen Gebiet der dritten Expedition.

Juli. Die Juli-Beobachtungen der ersten Expedition stammen aus dem Indus-, Shyock- und Nubra-Tale; in grösseren Höhen vom Shangposhi- und Lashi-Gletscher. Diese Beobachtungen wurden zusammengefasst mit jenen der dritten Reise, welche im Juli 1929 an die Gebiete von I grenzten und im Juli 1930 in etwas grösserer Entfernung südöstlich davon stattfanden. Die Temperaturen in Hunza, wo sich die zweite Expedition im Shingshal-Tal und beim Khurdopin-Gletscher aufhielt, sind merklich tiefer als die im östlichen Karakorum.

August. Die erste Expedition war in diesem Monat bei den Lashi-, Ghangmolung- und Popoche-Gletschern. III (1929) bewegte sich teilweise in denselben Gebieten, teilweise mehr NNWlich davon.

II hielt sich im Hunza-Gebiete im Shingshal- und Hunza-Tale, beim Malangutti- und Batura-Gletscher auf.

Es besteht wieder eine starke Temperaturzunahme von Westen nach Osten.

September. I zog aus dem Forschungs-Gebiet durch das Nubra- und Indus-Tal und über die Pässe WSWlich von Leh zurück. II befand sich auf dem Batura-Gletscher, im Hunza- und Hispar-Tal, beim Hispar- und Kunyang-Gletscher. III war nördlich der Karakorum-Kette im Aghil-Gebirge.

Es scheint das Ost-Karakorum-Gebiet wieder wärmer zu sein als das Hunza-Gebiet, die Ergebnisse vom Aghil-Gebirge weisen aber auf noch tiefere Temperaturen hin als die im Hunza gefunden wurden.

Sommer. Fasst man alle Ergebnisse der drei Sommermonate Juni, Juli und August zusammen und vergleicht man I und III, deren Beobachtungen aus derselben Gegend stammen, mit II, so sieht man aus den Tabellen 17 bis 21 wieder deutlich die Zunahme der Temperatur von Westen nach Osten.

Die Unterschiede sind, zumal sie sich auf die Mittel dreier Monate beziehen, zu gross, als dass sie zufällig genannt werden dürften.

Wie aus Figur 2 hervorgeht, nähern sich die Temperaturen der beiden Gebiete in grösseren Höhen (in der Figur sind auch die für 3250, 3750, u.s.w. m berechneten Werte angegeben).

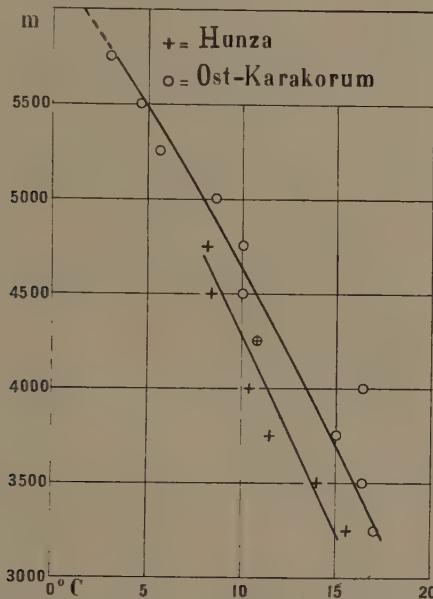


Fig. 2. Temperatur im Hunza und Ost-Karakorum.

An erster Stelle werden wohl orographische Effekte diese Temperatur-Unterschiede verursachen, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Die Streichrichtung der Täler ist in den beiden Gebieten ungefähr dieselbe. Nach VISSER sind aber die Täler im Hunza viel tiefer eingeschnitten als im östlichen Karakorum. Im Hunza sind die Berge hoch, ihre Wände ragen fast senkrecht empor, je weiter östlich man kommt, desto mehr bekommt die Landschaft den Charakter einer Hochebene mit weit voneinander entfernten Gebirgsketten.

Das hat zur Folge, dass zu Mittag die Einstrahlung im Osten viel grösser ist; weiter wird die geringe Durchlüftung des Hunza-Gebietes die Ansammlung der in grösseren Höhen während der Nacht abgekühlten Luft — besonders in den niedrigeren Niveaus — begünstigen.

In der Tat weisen insbesondere die Mittag- und Morgen-Temperaturen auf grosse Unterschiede hin.

Ueberdies kann man das Klima im östlichen Karakorum als kontinentaler auffassen als das im Hunza-Gebiet, sodass schon deshalb seine höhere Sommer-Temperaturen verständlich erscheinen.

Schliesslich ist, wie später erörtert wird, im östlichen Karakorum die Luftströmung der freien Atmosphäre eine mehr südliche als im Hunza-Gebiet, sodass dort etwas wärmere Luft zugeführt werden mag.

Nimmt man an, dass die von uns berechneten Sommer-Temperaturen nicht mehr als 1° oder 2° C von den Werten für die freie Atmosphäre abweichen, so liegen diese in den beiden Gebieten viel höher als die aus Ballonsonde-Aufstiegen abgeleiteten Werte der weiter im Süden gelegenen indischen Stationen, wie folgende Zahlen zeigen:

	4000	4500	5000	6000	m
Sommer					
Agra (27° N.B., 78° E.L.)	8.7	—	3.5	—	1.8 °C
Hunza (36° N.B., 75° E.L.)	11.4*	9.0*	—	—	°C
E-Karakorum (35° N.B., 78° E.L.)	13.4*	10.6*	8.0*	2.0*	°C

*) Diese Werte sind graphisch ausgeglichen (siehe Figur 2).

In Jhang (31° N.B., 74° E.L.) scheint die 0°-Isotherme im Sommer in etwa 4900 m Höhe zu liegen.

Die höheren Gebirgstemperaturen sind natürlich vor allem — auch noch oberhalb 5000 m — der grossen Massenerhebung zuzuschreiben.

Nicht unwahrscheinlich wäre es, dass daneben auch die Herkunft der Luftmassen eine Rolle spielt.

Hier könnten WAGNERS wichtige Strömungskarten für Indien in verschiedenen Niveaus während des Monsuns Auskunft geben.¹⁾

Nach diesen soll aber in 4000 und 5000 m oberhalb Ost-Karakorum und Agra Luft derselben Herkunft („kontinental“) etwa aus *nordwestlicher* Richtung strömen. Wäre das richtig, so könnte man aber nicht verstehen, dass die Gebirgsluftmassen so schnell ihre Wärme wieder verloren hätten. Sicher bedarf WAGNERS Schema für die *unteren* Niveaus noch einer Änderung, um so mehr, da wir aus VISSERS Beobachtungen für das östliche Karakorum-Gebiet eine WSWliche Luftströmung abgeleitet haben, sodass es sehr wahrscheinlich ist, dass die Luftmassen vom Ost-Karakorum und Agra doch verschiedenen Ursprungs sind.

Die Realität der höheren Temperaturen nördlich der Tiefebene wird bestätigt durch Pilotballon-Beobachtungen einiger nordindischen Stationen. Die tieferen Temperaturen im Süden bedeuten nämlich einen mit der Höhe abnehmenden Luftdruck-Gradienten für die dort wehenden fast westlichen Winden.

WAGNERS Tabelle III¹⁾ entnehmen wir die Daten der resultierenden Luftversetzung von Lahore, Simla und Peshawar:

Höhe	Richtung in °.							km
	1	2	3	4	5	6	7	
Lahore	247	301	326	333	324	287	266	
Simla	—	—	319	324	282	233	242	
Peshawar	—	—	—	312	306	302	—	

	Stärke m/sec.							
	2.2	2.2	3.2	4.5	4.5	4	6	
Lahore	—	—	—	—	—	—	—	
Simla	—	—	3.2	2.0	1.5	3.8	5	
Peshawar	—	—	—	5.4	5.2	6.9	—	

¹⁾ A. WAGNER. Zur Aerologie des indischen Monsuns. Gerlands Beiträge, 30, S. 196 (1931).

Wie ersichtlich nimmt in Lahore die Windgeschwindigkeit von 4 bis 6 km Höhe ab; in Simla herrscht eine Abnahme von 3 bis 5 km, während in Peshawar von 4 bis 5 km eine Abnahme zu verzeichnen ist. Vielleicht erstreckt sich dieser Einfluss des nach oben abnehmenden Luftdruck-Gradienten noch weiter nach Süden; es wäre sogar nicht unmöglich, dass er für die aerologische Struktur des indischen Monsuns einen wichtigen Faktor darstellt.

Eine weitere Bestätigung der oben besprochenen Temperatur-Verhältnisse findet man vielleicht in der Schneegrenze. Nachfolgende VISSERS Arbeit entnommene Tabelle gibt eine Uebersicht der Höhen der Schneegrenzen im westlichen und östlichen Teil der Gebirge von Norden nach Süden fortschreitend ¹⁾:

Schneegrenzen.

Westlicher Teil:

N.	Tien Shan	3650/3950 m nach MERZBACHER
	Muztagh Ata.	4870 m nach BOGDANOWITSCH und
	Bara Khun-Gruppe	5100 m " VISSER [SVEN HEDIN
	Mai Dur-Gruppe	5200 m "
	Karakorum-Nordseite	4900 m "
	" -Südseite	5000 m " OESTREICH
	Himalaya-Nordseite	5800 m " CUNNINGHAM
S.	" -Südseite	5100 m " MONTGOMERIE

Östlicher Teil:

N.	Tien Shan	3650/3950 m nach MERZBACHER
	Sanju-K'un-lun-Nordseite	4900/5000 m " TRINKLER
	" -Südseite	5000 m " "
	K'un-lun-Nordseite	4900 m "
	" -Südseite	5200 m " " SODOJEWSKI gibt als Mittelwert 5100 m an
	Suget-K'un-lun-Nordseite	5500 m nach TRINKLER
	Aghil (Karakorum-Pass) -Nordseite	5600 m " VISSER, MASON gibt 5800 m
	" -Südseite	6000 m " MASON
	Karakorum-Nordostseite	5500/5650 m " VISSER
	" -Südwestseite	5200/5600 m " "
	Kailas-Karakorum Nordostseite	5200 m " "
	Ladakh-Karakorum Nordseite	5500 m " TRINKLER und DREW
	" " Südseite	5800 m " " " "
	Zaskar-Himalaya-Nordseite	5850 m "
	" " -Südseite	6000 m "
	Himalaya-Nordseite	5600 m
	" -Südseite	5250 m

Erstens ist das Steigen der Schneegrenze von West nach Ost in Zusammenhang zu bringen mit den höheren Temperaturen im östlichen Karakorum-Gebiet. Zweitens sieht man, dass im allgemeinen die Schneegrenze im Süden höher ist als im Norden, was natürlich dem höheren Sonnenstand zuzuschreiben ist. Auffallend ist aber, dass die südliche

¹⁾ PH. C. VISSER und J. VISSER—HOOFT. l.c.

Himalaya-Kette mit etwa 5400 m wieder eine tiefere Schneegrenze hat als der weiter nördlich gelegene Zaskar-Himalaya, dessen Schneegrenze im Mittel bei 5900 m liegt. Obwohl dies in erster Linie ein Niederschlags-effekt ist, dürfte es auch mit den tieferen Temperaturen der indischen Tiefebene in Zusammenhang stehen.

Wie auch aus der Figur 2 hervorgeht, nimmt der vertikale *Temperaturgradient* infolge der Abnahme der Gebirgsmasse in grösseren Höhen zu.

Im Ost-Karakorum ist er zwischen 3250 und 5500 m Höhe im Mittel etwa 0.55°C pro 100 m. Unregelmässigkeiten wie in 4000 und 4250 m Höhe sind der geringen Anzahl der Beobachtungen zuzuschreiben. Die grössere Abnahme zwischen 4750 und 5250 m Höhe könnte mit der in diesem oder in etwas höherem Niveau verlaufenden Schneegrenze zusammenhängen. Im Juni liegt diese starke Abnahme bei der dann niedrigeren Schneegrenze in etwas geringerer Höhe als in den anderen Monaten. Am Morgen ist der Gradient etwas kleiner als zu Mittag und am Abend.

Im Hunza-Gebiet ist der mittlere vertikale Temperaturgradient zwischen 3250 und 4750 m 0.50°C pro 100 m. Der Morgenwert ist kleiner als der Abendwert und dieser wieder kleiner als der Mittagwert.

CANNEGIETER hat aus den Beobachtungen der ersten Expedition einen mittleren Temperaturgradient von 0.65°C pro 100 m abgeleitet¹⁾, ein Wert, welcher uns zu hoch vorkommt. Er hat denselben aus 9 Vergleichen von Gipfelbeobachtungen mit Temperaturwerten von Leh und Dras berechnet. Meistens rührten diese von Nachmittagsbeobachtungen her; Strahlungsstörungen sind also nicht ausgeschlossen, besonders weil die Besteigungen der höheren Gebirgsgipfel (Lashi-Peak, Namlung-Peak und Saser-Peak, alle etwa 6100 m hoch), welche u.a. zum Vergleich herangezogen worden sind, bei schönem Wetter stattfanden.

CANNEGIETER berechnet die mittlere Temperatur oberhalb Leh in 6000 m und findet 1.3°C , während die 0° -Isotherme nach ihm in 6200 m Höhe liegt. Nach unseren Berechnungen kommen wir für Ost-Karakorum auf 1.0°C bzw. 6100 m.

CANNEGIETER fügt die Bemerkung bei, dass seine Werte auffallend hoch sind im Vergleich zu jenen, welche man oberhalb Batavia gefunden hat, wo die mittlere Temperatur in 6000 m — 8.5°C beträgt, und die 0° -Isotherme sich in 4600 m Höhe befindet. Wir haben oben bereits auf die tieferen Temperaturen der nordindischen Tiefebene hingewiesen.

Zu den Zahlen von Tabelle 20 möchten wir schliesslich noch bemerken, dass die in 3500 m gelegene Station Leh eine mittlere Sommer-Temperatur von 15.8°C hat²⁾ gegenüber 16.3°C , wie sie von uns für diese Höhe gefunden wurde, was beweist, dass unsere Methode der Mittelbildung nicht schlecht ist.

¹⁾ Naar Himalaya en Karakorum (1924). Bijlage.

²⁾ Indian Meteorological Memoirs. Vol. 17 (1904).

In den Tabellen 21 bis 25 haben wir weiter die Ergebnisse der drei Expeditionen für die Monate Juni, Juli, August und September gesondert und im Mittel aller 4 Monate dargestellt. Der tägliche Gang der Temperatur ändert sich mit der Höhe wenig; erst ab 5000 m wird seine Amplitude kleiner.

Ziemlich gross ist der Unterschied der Temperaturen in den einzelnen Monaten. Fasst man ihre Werte in drei Zonen zusammen: A (3250-4000 m), B (4250-4750 m) und C (5000-5500 m), so findet man:

	Juni	Juli	August	September	
A	12.4	16.8	13.0	8.8	°C.
B	8.6	10.7	11.4	4.3	°C.
C	0.6	7.7	6.7	0.9	°C.

Besonders in grössen Höhen steigt die Temperatur in Sommer also schnell an, um im September wieder rasch zu sinken.

WAGNER¹⁾ meint aus dem jährlichen Temperaturgang von Agra schliessen zu können, dass der *September* für die Bezungung hoher Gipfel in dieser Gegend, was die Temperatur angeht, nicht viel ungünstiger ist als der *Juni*. Wir möchten hier betonen, dass aus unseren Zahlen hervorgeht, dass unterhalb 4750 m die Unterschiede zwischen diesen Monaten noch ziemlich bedeutend, oberhalb 5000 m in der Tat gering sind. Hiezu sei bemerkt dass unsere Beobachtungen aus nördlicher gelegenen Gegenden stammen als der Nanga-Parbat.

Schliesslich wollen wir noch einige extrem hohe Temperaturwerte anführen. Bei der ersten Expedition wurde auf dem Shangposhi-Peak (5625 m) 10 °C beobachtet, auf dem Lashi-Peak (6076 m) 3.5 °C, auf dem Namlung-Peak (gut 6070 m) 2.5 °C, auf dem Saser-Gipfel (etwa 6100 m) 0 °C. Obwohl zu Zweifel kein Anlass besteht, kommt uns eine Temperatur von 11.5 °C auf dem Deception-Peak (5825 m) doch ausserordentlich hoch vor.

Uebrigens findet diese letzte Beobachtung vielleicht eine Stütze in den Werten 4 °C und 11 °C in etwa 5300 m, die im Hunza-Gebiet beobachtet wurden; bei der dritten Expedition wurden in etwa 5600 m 11 °, 10.5 ° und 10 °C gemessen und in etwa 5400 m betrug der höchste Wert 14.5 °C.

II. Feuchtigkeit.

CANNEGISTER²⁾ bezeichnet es als auffallend, dass bei der ersten Expedition in keinem einzigen Falle die äusserst niedrigen Werte für die relative Feuchtigkeit gemessen wurden, welche man bei Föhn-Winden in den Alpen antrifft. Demgegenüber stellte aber sowohl die zweite als auch die dritte Expedition manchmal extrem grosse Trockenheit fest, so dass die Vermutung nahe lag, dass die Feuchtigkeits-Bestimmungen bei der ersten Reise nicht ganz korrekt durchgeführt worden waren.

¹⁾ Meteorologisches zur Nanga-Parbat-Expedition. Mitteilungen des deutschen und österreichischen Alpenvereins. S. 276 (1934).

²⁾ Naar Himalaya en Karakorum (1924). Bijlage.

Und in der Tat stellte sich heraus, dass irrtümlich für die Berechnung der Dampfdruck-Werte der ersten Expedition die Psychrometer-Konstante des ASSMANN-Thermometers verwendet worden ist, während in Wahrheit in den meisten Fällen das Schleuder-Thermometer abgelesen worden war, was zu den zu hohen Werten Anlass gibt. Leider gestatten die wenigen gleichzeitigen Beobachtungen mit ASSMANN- und Schleuder-Thermometer nicht einwandfrei eine exakte Psychrometer-Konstante für die erste Reise festzustellen, sodass wir es vorziehen die Feuchtigkeits-Bestimmungen dieser Reise ausser Acht zu lassen.

A. Dampfdruck.

Juni. Die Beobachtungen im Hunza-Gebiete liefern kleinere Dampfdruckwerte als die Beobachtungsreihen der dritten Expedition (Tabellen 26—29). Besonders die Mittag- und Abendmittel weisen auf grosse Unterschiede hin.

Im *Juli* (Tabellen 30—33) kommen wieder grössere Unterschiede zwischen den westlichen und östlichen Gebieten vor. Besonders in 3500 m sind die Dampfdruckwerte im östlichen Karakorum höher als jene im Hunza.

Obwohl im *August* ein direkter Vergleich der Werte in denselben Niveaus nicht möglich ist, kann man aus den Tabellen 34—37 einen grösseren Wasserdampfgehalt bei der dritten Expedition gegenüber der zweiten extrapoliieren.

Im *September* sind die Unterschiede zwischen Hunza und Aghil nicht gross; die Morgenwerte sind bei III kleiner als bei II, am Nachmittag und Abend ergibt aber III wieder höhere Werte (Tabellen 38—41). Hieraus kann man schliessen, dass das Aghil-Gebirge trockener ist als der östliche Karakorum. Wie VISSER an anderer Stelle mitteilen wird, erkennt man aus der Landschaft im Aghil schon direkt den typisch ariden Charakter.

Vom *Sommer* sind die Ergebnisse in den Tabellen 42—45 zusammengestellt. Sie zeigen wieder deutlich, dass der Westen trockener ist als der Osten.

Oberhalb 4000 m scheinen im Hunza-Gebiet die Dampfdruckwerte ziemlich gleichmässig mit der Höhe abzunehmen, im Ost-Karakorum erfolgt zwischen 4000 und 4500 m eine rasche, zwischen 4500 und 5000 m eine langsame und darüber wieder eine schnellere Abnahme. Bemerkenswert ist auch, dass die Mittag- und Abendwerte im Hunza etwas kleiner sind als die Morgenwerte, wogegen im Ost-Karakorum die Mittag- und Abendbeobachtungen in fast allen Niveaus höhere Werte ergeben.

Beide Tatsachen weisen auf einen geringeren vertikalen Austausch im Hunza hin; die stärkeren aufsteigenden Luftströmungen im Ost-Karakorum verursachen die langsame Abnahme des Dampfdruckes zwischen 4500 und 5000 m, auch bringen sie am Nachmittag die wasserdampfreiche Luft in grössere Höhen. Man kann hier wieder auf eine kleinere Einstrahlung im Hunza-Gebiet schliessen, wie bereits auf Seite 749 erwähnt wurde.

Der verhältnismässig hohe Dampfdruck in 5000 m im Ost-Karakorum

könnte vielleicht mit dem in dieser Höhe schmelzenden Schnee in Zusammenhang gebracht werden.

Eine gute Uebersicht über die Monate Juni—September vermitteln die Tabellen 46—49, in denen die Werte der beiden Expeditionen zusammen verarbeitet sind. Im Juli sind die Werte in den untersten Niveaus am höchsten, im August werden in den höheren Schichten die grösseren Werte angetroffen; das mag mit der grösseren Turbulenz im August in Zusammenhang stehen. Wie die Temperatur sinkt auch der Dampfdruck im September rasch.

Nehmen wir wieder die drei Zonen A (3250—4000 m), B (4250—4750 m) und C (5000—5500 m), so finden wir für die Tagesmittel:

	Juni	Juli	August	September	
A	3.6	6.3	4.5	3.8	mm Hg.
B	3.6	4.0	4.6	2.8	" "
C	3.7	—	4.6	2.3	" "

Schliesslich gibt Tabelle 50 alle Beobachtungen der Monate Juni—September.

B. Relative Feuchtigkeit.

Juni. Die relative Feuchtigkeit ist in diesem Monat im Osten grösser als im Westen. Besonders am Abend sind die Unterschiede bedeutend (Tabellen 51—54).

Juli. Nach den Tabellen 55—58 sind im Juli die Unterschiede zwischen den beiden Gebieten geringer, aber noch imselben Sinne wie im Juni.

Im *August* ist ein Vergleich nicht gut möglich (Tabellen 59—62).

Die *September*-Beobachtungen weisen auf eine geringere relative Feuchtigkeit im Aghil-Gebirge als im Hunza-Gebiet hin (Tabellen 63—66).

Aus der Zusammenfassung der Sommer-Beobachtungen (Tabellen 67—70) ist ersichtlich, dass im Ost-Karakorum die relative Feuchtigkeit grösser ist als im Hunza. Im Hunza-Gebiet nimmt sie nach oben hin ab, im Ost-Karakorum scheint sie dagegen bedeutend zuzunehmen, eine Tatsache, welche wieder auf eine daselbst intensivere Vertikalzirkulation hinweisen dürfte.

Die Tabellen 71—74 zeigen, dass in den tieferen Niveaus der Juni am trockensten, der September am feuchtesten ist, oberhalb 5000 m hat dagegen der Juni die grösssten und der September die kleinsten Werte. Für die Zonen A (3250—4000 m), B (4250—4750 m) und C (5000—5500 m) findet man:

	Juni	Juli	August	September	
A	36	44	51	53	%
B	46	38	51	54	%
C	69	—	60	47	%

Die Ergebnisse der zweiten und dritten Expedition für Juni—September bringt Tabelle 75.

Es bleibt jetzt noch die Frage zu beantworten, warum die Feuchtigkeit (sowohl absolut als relativ) im Osten grösser ist als im Westen. Zweifellos hängt das mit der Geographie und mit der Herkunft der Luftmassen zusammen.

Im Hunza ist die mittlere Windrichtung West; hier kommen manchmal Luftmassen vor, welche schon die westlich gelegenen hohen Gebirgsrücken vom Hindu Kush überschritten haben.

Im Ost-Karakorum weht der Wind im Mittel aus WSW; die Luft hat hier noch nicht so hohe Gebirge überquert, auch gestatten sowohl das breite Indus-Tal als die niedrigeren Bergmassive zwischen Nanga-Parbat und Mount-Ser bei Winden aus West und Südwest den Zutritt feuchterer Luftmassen aus Nord Punjab. Das Material ist leider zu spärlich um zu beurteilen bei welcher Windrichtung die grösste Feuchtigkeit angetroffen wird. Die Wolkenbeobachtungen im Ost-Karakorum zeigen aber am Morgen, ehe sich der störende Einfluss der Konvektion bemerkbar macht, bei den SW-Winden eine um etwa 2 Zehntel grössere Himmelsbedeckung als bei W-Winden (0.7 gegenüber 0.5). Mittag- und Abend-Bewölkung weisen ebenfalls auf feuchteren Südwestwind hin, obwohl die Unterschiede etwas kleiner sind.

Dass das Aghil-Gebiet trockener ist, versteht sich, weil die Luft dort beim Passieren der Karakorum-Ketten einen Teil ihres Wassergehalts abgab.

III. *Luftdruck.*

Mit Hilfe der Temperatur- und Feuchtigkeitsergebnisse berechnen wir ausgehend von den Basiswerten des Luftdruckes von Leh die Luftdruckwerte in verschiedenen Höhen für den Sommer und für Juli:

Höhe	Sommer	Juli
3500 m	663.7 mbar	662.7 mbar
4000 "	625.4 "	624.9 "
4500 "	589.0 "	588.9 "
5000 "	554.4 "	554.6 "
5500 "	521.5 "	522.0 "
6000 "	490.2 "	490.9 "

Die Juli-Werte sind besonders in 4000 m niedriger als die von SHAW graphisch dargestellten¹⁾ und auch niedriger als die von BANERJI und RAMANATHAN²⁾; in 6000 m schliessen sie aber gut an die letzteren Werte an.

Die WSW-Winde, welche in diesem Gebiete wehen, weisen auf noch höheren Luftdruck südlich vom Karakorum hin. SHAWS Karten bedürfen also hier in einigen Punkten einer Richtigstellung.

(*Fortsetzung folgt.*)

¹⁾ NAPIER SHAW. Manual of Meteorology, Vol. II, p. 265 (1930).

²⁾ H. C. BANERJI und K. R. RAMANATHAN. Scientific Notes. India Meteorological Department. Vol. III, p. 21.

Botany. — A Consideration of some Phytochemical Problems. By TH. WEEVERS. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of May 23, 1936).

In 1847 ROCHLEDER defined Phytochemistry as the science which studies the connection between taxonomy and plant chemistry. Various investigators, however, have since called in question several aspects of this connection, some of which I propose to examine here with a view to obviating a number of their objections.

The first and most important of these is the assertion that according to the doctrines of phytochemistry the genera and families of the plant kingdom ought always to be characterized by certain definite chemical compounds. Generally speaking this is certainly not the case, although the doctrine holds good for a few genera; thus salicin is exclusively found in the genera *Salix* and *Populus*, chinine alkaloids in *Cinchona* and *Remya*, both two closely related genera.

This assertion, however, arises from a misunderstanding of the principles of taxonomy. For rarely, if ever, is a genus characterized by one morphological quality; it is always a definite combination of morphological characteristics which defines the place in the system. Now the same is true of the chemical characteristics. Some examples will make this clearer.

The compound cineol occurs in a number of widely different families, such as the *Labiatae*, *Myrtaceae*, *Zingiberaceae*, etc., but one definite combination of cineol and a number of cyclic and non-cyclic terpenes completely characterizes the genus *Eucalyptus* from a chemical point of view. This great Australian genus, which comprises over 400 species, has been extensively studied chemically by BAKER and SMITH¹), who in a monograph entitled *Researches on the Eucalypts especially in Regard to their Essential Oils* have chemically analyzed the oils of some 170 species. In not two species of these does the oil possess the identical chemical composition, neither qualitatively nor quantitatively. This is due to the fact that besides cineol the *Eucalypts* may contain pinene, phellandrene, geraniol, citral, cymol, terpinene, etc., in all some 20 different compounds, variously combined. In each species, therefore, the combination is a different one, exactly as in the case of the morphological characteristics.

Even the varieties of one species are sometimes characterized by different combinations of chemical compounds. (e.g. *Eucalyptus dives*).

Another example is furnished by the *Papaveraceae*. Just as these are characterized morphologically by a combination of characteristics, each of

¹) BAKER, R. T. and SMITH, H. G., Sydney (1902).

which is quite frequent in itself, such as hypogenous flowers, petals and sepals in binary whorls, carpels united, etc., thus they can be accurately defined chemically by a certain definite combination of alkaloids in the latex-vessels.

These alkaloids are derived from the product of protein metabolism called tyrosine and the same is the case with the alkaloids of several other groups of plants. But the alkaloids of the *Papaveraceae* are derived in a special way and are present in a combination which is nowhere else to be met with. In addition to this nearly all *Papaveraceae* contain one and the same alkaloid which is called protopine or fumarine. The combination of these alkaloids again differs in different parts of the family. The *Fumaroideae*, with their zygomorphic flowers and stamens united in two bundles, present a combination of isochinoline-derivatives different from the one which characterizes the *Papaveroideae*, with their actinomorphic flower and free stamens. The genus *Corydalis* contains a combination of alkaloids which differs from that found in the genus *Fumaria*.

In short, it is a definite combination of a number of chemical compounds in a species or genus that forms the phytochemical characteristic, not one single compound. A classification of plants along these lines is strictly analogous to the usual classification on a morphological basis. In a former publication¹⁾ I discussed the possibilities of such a classification on a phytochemical basis.

A second objection to phytochemistry which is often made concerns the fact that one and the same compound is often found in widely different families. It is true that this objection is partly met by the above consideration but not wholly so. Let us examine, however, which are these compounds that are met with in such widely removed parts of the plant kingdom!

In an earlier publication of mine²⁾ concerning the synthesis of alkaloids in the vegetable kingdom it was pointed out that those compounds which occur in various unrelated families of plants always have originated via one or a few simple reactions from products of metabolism of general occurrence, e.g. the products of protein metabolism.

The same has been demonstrated by me³⁾ with regard to a number of *aromatic compounds* and *terpenes*, which could be derived from *lignine*, the product of lignified cell walls.

This time I propose to consider some *glucosides* in this connection. For ages genera belonging to different groups of the Angiosperms have been known to us which are notorious for their action on the heart. In various parts of the world these plants were discovered and used either as arrow-poisons or as medicines. I mention as examples:

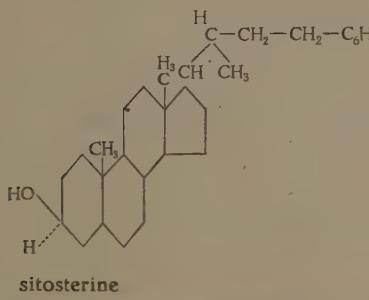
¹⁾ WEEVERS, TH. Die Pflanzenalkaloide phytochemisch und physiologisch betrachtet. Recueil des Trav. botan. néerlandais. Vol. XXX (1932/3).

²⁾ WEEVERS, TH. Die Pflanzenalkaloide, etc. Rec. d. Trav. bot. Vol. XXX (1932/3).

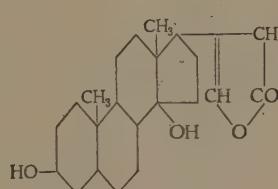
³⁾ WEEVERS, TH. Proc. Royal Acad. Amsterdam, Vol. 36 (1934).

<i>Convallaria majalis, Urginea Scilla</i>	fam. <i>Liliaceae</i>
<i>Adonis vernalis, Helleborus viridis</i>	„ <i>Ranunculaceae</i>
<i>Digitalis</i> spec.	„ <i>Scrophulariaceae</i>
<i>Strophantus</i> spec.	„ <i>Apocynaceae</i>
<i>Gomphocarpus, Peiploca</i> spec.	„ <i>Asclepiadaceae</i>

It used to be thought that these plants only resembled each other in their physiological effect; also the chemical composition of these compounds was entirely unknown; we knew no more than that they were *glucosides* whose aglukon contained no nitrogen. Attempts to isolate the compounds in a pure form proved unsuccessful. Of late years, however, our knowledge of these compounds has advanced enormously by the work of WINDAUS, TSCHESCHE, JACOBS and others. It has been found that these *glucosides* bear a remarkable resemblance to each other as regards their chemical composition.



sitosterine



digitoxigenine

These aglukons: *digitoxigenin* and *gitoxigenin* from *Digitalis*, *cymarin* from *Strophantus*, etc., are composed of 23 C-atoms and of mostly 34 or 36 H-atoms and 4 or 5 O-atoms. Their structure too has been unravelled; it proved to be a complex carbon-system consisting of 3 six-rings of C-atoms, one five-ring of the same, and a lacton-ring.¹⁾

But the most remarkable aspect of the discovery was that this structure bears a close resemblance to that of the sterines, compounds that seem to occur in *every* plant cell as well as in the animal cell, and which with the phosphatides form the chief component of the lipoids. *Cholesterine* in animal tissues, *sitosterines* in the vegetable kingdom, form from 1 % to 2 %, sometimes even 8 % of the parts extractable with ether, of which they are the non-saponifiable portion.

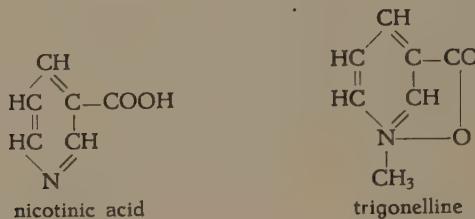
Thus here again the occurrence of compounds as closely related as these in widely different groups of the *Angiosperms* is explained by their intimate chemical connection with one omnacellular product.²⁾

Some remarks on the *alkaloids* will terminate this survey. One fact still seemed to militate against the hypothesis that those *alkaloids* which are

¹⁾ TSCHESCHE. Die Konstitution der pflanzlichen Herzgifte. Z.schrift Angewandte Chemie (1934).

²⁾ The aglukons of the saponins of *Digitalis* and that of *Smilax* spec. called *parigenin* have a similar structure; they are also connected with the omnacellular sterines.

most widespread ought also to be the most easily derived from generally occurring products of protein metabolism, namely that *trigonelline* is the alkaloid of the most widespread occurrence. For *trigonelline* is the betaine of *nicotinic acid* or *pyrido-carbonic acid* and neither this acid nor pyridine itself were known to be common products of metabolism. *Trigonelline* is found in 18 different families, *coffeeine*, the next alkaloid for widespread frequency, in only 6 families.



It is true that attempts have been made by TRIER¹⁾ to argue the plausibility of *pyridine*-derivatives being formed out of *proline*, which certainly is a product of protein breakdown and perhaps also a material that goes to the making of fresh protein. But this transformation of the five-ring of *proline* into the six-ring of *pyridine*, although practicable with biochemical means, as TRIER has demonstrated, is far from simple, and this explanation of the fact that *trigonelline* should be the alkaloid most generally met with is more or less laboured.

At this point of the controversy experiments made by WARBURG, CHRISTIAN and GRIESEN²⁾ have come to prove that the coferment of the animal dehydrases is an amido-derivative of *pyridine* which through hydrolysis yields *nicotinic acid*, in which connection it should be remembered that *trigonelline*, as I have already said above, is the betaine of *nicotinic acid*.

So far, it is true, this coferment of the dehydrases has only been isolated by the above-mentioned investigators from red blood corpuscles³⁾ but there is a possibility that this system of dehydrases may also occur in plant tissues, although EULER and his collaborators have demonstrated that a different dehydrase may be present there.

A provisional investigation of the occurrence of this WARBURG coferment in the vegetable kingdom, especially among the *Angiosperms* is being conducted in my laboratory. Mr. A. W. H. VAN HERK has already been able to prove that in *Sauromatum guttatum* in the spadix is present a coferment which has the same physiological effect as the coferment of WARBURG. It is, therefore, very probable that these coferments are identical

¹⁾ WINTERSTEIN-TRIER. Die Alkaloide. Eine Monographie der natürlichen Basen. 2e Auflage. Berlin (1931).

²⁾ WARBURG, CHRISTIAN and GRIESEN. Biochemische Zeitschrift (1935).

³⁾ The coferment consists of a carbohydrate, phosphoric acid + adenine and the *pyridine* derivative in question.

and that even trigonelline can be derived in a straightforward manner from a common product of metabolism.

S U M M A R Y.

It is a definite combination of a number of chemical compounds in a species, genus or family that forms the phytochemical characteristic, not one single compound.

A classification of plants along these lines is analogous to the usual classification on a morphological basis.

The compounds which occur in various unrelated families always have originated via one or a few simple reactions from the products of metabolism of general occurrence.

With regard to glucosides notorious for their action on the heart the intimate chemical connection with the ubiquitous phytosterines is demonstrated.

The widespread occurrence of the alkaloid trigonelline may be explained by its connection with nicotinic acid, which acid can be obtained by hydrolysis of the dehydrase-coferment in blood corpuscles.

As from the spadix of *Sauromatum* a coferment with an identical action has been obtained, it is very probable that the same coferment is everywhere present in the higher plants.

Anatomy. — *Radix præmolarica unilateralis*. By TH. E. DE JONGE-COHEN.
(Communicated by Prof. M. W. WOERDEMAN.)

(Communicated at the meeting of April 25, 1936).

Arranging human teeth among those organs resp. organsystems, which *ab origine* have in themselves the character of bilateral symmetry, than we have to connect this restriction, that in the full grown individuals we will find that symmetry but partly realized.

In this respect also our dental system is certainly no exception! So deeply we have assented to the axiom of physiological asymmetry, that we scarcely account for the fact, that all collective asymmetries are secundair: primair is what we up to now as bilateral symmetry may mention one of the most important formqualities of human stature!

So well known as asymmetries of the teethrows may be, just so remarkable is the fact, that we possess but few exact informations concerning the

asymmetries of their components. It is however sure, that not only in numerical composition but also in form and size — sometimes rather important — differences occur between the homologous toothelements on both sides the median. May this prevail on the first place for frontteeth —



Fig. 1.

incisivi and cupidati — it will be clear, that the asymmetries of the postcanine elements with their morphological more differentiated structure of crown and root will prove more accentuated.

For more special particulars we refer to our informations on an earlier date (1): it will be sufficient to conclude, that we *excepting one case* could observe special asymmetries in their structuring promotion concerning præmolares as well as molares. The exception, the more contrasting, as the divergences of the proximal and distal synerget being found speak for themselves, forms our first molar.

There is no question of incongruence: neither in number nor in form or size. Agenesis is not to be found here. Form and size are on both sides constantly equal, for crown- as well as for root-formation, in normal and variable forms. Also in structuredetails — for example the development of the proximal edgecrista and the rugæ of the so-called "enamelfeathers" on, and just so of the sulci and foramina between the crowntubercula, the finer contours of the occlusal edges on the one hand and the crownroot-border (enameline) on the other hand — divergences are scarcely to be observed.

The crown of our first molar, in its normal configuration consequently still bilateral-æquiform, has besides that also in its simplifying appearances the same symmetrical character. With reference to the above mentioned information about cuspformation of the postcanine teeth in the lower jaw we concluded "that the simplifying of its structure, in contradiction to that of both the other molars, characterizes itself by its perfectly symmetrical nature. Although *a priori* we would not decline the possibility of a casual ciphergrouping, we rather believe in finding the explanation in the direction, SCHWARZ has shown us. In his lecture about the first molar he has drawn special attention to the signification of this element for the further development of the toothbows: normal relation to its antagonist in the upper

jaw has to an important degree its influence also by the symmetrical structure of its crown¹⁾"!

Even in the rootformation we find in normal state as well as in those cases, which are not so exceptional, for instance in the upper jaw, where distobuccal and oral root in more or less degree can be dissolved, at every time the same tendency.



Fig. 2.



Fig. 3.

Finally may be mentioned, that litterature gives us not a single example of dissymmetrical formdevelopment of the first molar: but we think its strong contradiction to the other toothelements as phenomenon so striking, that we by this time the possibility of a casual ciphergrouping — formerly not absolutely declined by us — finally must reject. On the contrary: in our opinion we may consider the bilateral isomorphism of the first molar qua character — which makes a difference which the second and third molar — to be above every doubt.

* * *

The case for which we ask your attention below, however, is a perfect contradiction, viz. the unilateral development of a superfluous oral root (Fig. 3).

We know, that the presence of such a superfluous radix is concerning the foremost molar of the lower jaw not so rare deformity: former authors were well aware of it. MÜHLREITER (2) has given us an exact description in his second edition *Anatomie des menschlichen Gebiszes* (1891)²⁾. It was BOLK (3), who presented to us the explanation, considering it to be the radixrudiment of the forlorn fourth præmolaris — this idea has been descripted by him as "radix præmolarica".

¹⁾ Op. cit. page 438 (translation of the dutch text).

²⁾ Page 90, fig. 52.

Something like that we met with in rather classical form at the right one of both specimina of the first molar, derived from the same individual.

BOLK's point of view has been contested, principally owing to the objection, that the development of superfluous oral radices should not form the special privilege of the first molar. And rather on foundation of reasoning *per analogiam* one has wrongly aligned radix præmolarica and that radixsplicings, which for the second and third molar belong to the not so rare occurring formanomalies. Wrongly: because of the lack of transitionforms, characteristic for the formation of real radixduplication — indifferent whether this has been caused by splicing or by differentiation — this modus of explaining the matter had to fail.

It was on an earlier date, that we demonstrated, "that for the settlement of their identity not only their own topography would be final, but we have also to reckon with their relation to the other radicelements as well as with their structure: not only on the preceeding ground we dare not take upon us all the by GOTTARDI described radices præmolaricæ and not so the cases from former publications on this subject" (4)¹.

* * *

After this consideration returning to our own radix præmolarica, the question will arise, how to combine the unilateral development of this with the bilateral symmetry, which also in this case prove to characterize both the molars: for the isomorphism of their crowns — *namelijk* the finer details of the mastical surface, its outline being by both about 33 m.m. — finds its logical continuation in an almost perfect similarity of both proximal radices (Fig. 1 and 2); in this connection the distal are left *eo ipso* out of regard!

In case the radix præmolarica were but a substratum of a radixsplicing, the above mentioned hypothesis of the bilateral isomorphism were very difficult to maintain: that tallies exactly with the idea, that the radix præmolarica represents an element, which has genetically nothing in common with the first molar, be it but only dissolved in one element.

From this point of view our case proves in perfect harmony with our theorem of the bilateral isomorphism of the first molar — even more: in its unparalleled curiosity it means an uncommonly splendid illustration of BOLK's opinion about the signification of the radix præmolarica.

SUMMARY.

Description and illustration of a superfluous oral root (radix præmolarica-BOLK).

Only when we assume — as BOLK does — that the radix præmolarica does not belong genetically to the formation of the first molaris, the contra-

¹) L.c. page 6 and 7 (translation of the dutch text).

distinction between the unilateral development of this element and our opinion concerning the bilateral isomorphism of the first molaris finds a natural bridge.

Premising, that this opinion is correct, the case in question provides a striking illustration however of BOLK's point of view regarding the significance of the radix præmolarica.

ZUSAMMENFASSUNG.

Beschreibung und Abbildung einer überzähligen oralen Wurzel (radix præmolarica-BOLK).

Nur wenn wir — wie BOLK — annehmen, dass die radix præmolarica genetisch nicht zur Anlage des ersten molaris gehört, ist die natürliche Brücke gefunden zu dem Gegensatz zwischen der unilateralen Entwicklung dieses Elementes und unserer Ansicht hinsichtlich der bilateralen Isomorphie des ersten molaris.

Indem wir die Richtigkeit dieser Ansicht vorausschicken, geben wir in unserem Falle ausserdem aber eine schöne Illustration zu BOLK's Ansicht über die Bedeutung der radix præmolarica.

BIBLIOGRAPHY.

1. DE JONGE-COHEN, TH. E., De knobbelformatie der postcanine ondertanden. Bijdrage tot de odontographie van 's menschen gebit. *Tijdschrift voor Tandheelkunde*, Vol. XXXVI, Nr. 6 (1929).
Idem, *Anatomischer Anzeiger*, Vol. LXXIV, Nr. 9/10 (1932).
2. MÜHLREITER, E., Anatomie des menschlichen Gebisses. Leipzig (1891).
3. BOLK, L., Bemerkungen über Wurzelvariationen an menschlichen unteren Molaren. *Zeitschrift für Morphologie und Anthropologie*, Vol. XVII, Nr. 3 (1914).
4. DE JONGE-COHEN, TH. E., Enkele beschouwingen naar aanleiding van de onderzoeken van GOTTARDI. *Tijdschrift voor Tandheelkunde*, Vol. XXXV, Nr. 1 (1928).
Idem, *Anatomischer Anzeiger*, Vol. LXXI, Nr. 17/18 (1931).

*Anatomical-Embryological Department University
of Amsterdam, Mauritskade 61, O..*

Anatomy. — *The diencephalic and some other systems in Xantharpyia amplexicaudata.* I. By NAOKICHI SUZUKI. (Dutch Central Institute for Brain Research, Amsterdam. Department of Anatomy, Manchuria Medical College, Mukden.) (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS.)

(Communicated at the meeting of May 23, 1936).

Concerning the brain of the larger Chiroptera, few data exist, referring only to some aspects of the central nervous system of *Pteropus*. KOHLBRUGGE¹⁾ gave a macroscopic description of the brain of *Pteropus edulis*. DRÄSEKE, HATSCHEK and FUSE dealt with the peculiarities of the pyramidal tract in *Pteropus* (l.c.i.) and LE GROS CLARK published three sections through its thalamus²⁾.

Of another species: *Xantharpyia amplexicaudata*, the Institute for Brain research possesses several specimens, for which it is indebted to Dr. D. DE LANGE JR. Some brains of these animals have been cut transversally and the sections stained after VAN GIESON, with iron haematoxylin, and after WEIGERT-PAL with a counterstain of paracarmine. For the illustration of the diencephalon of this, in several respects primitive mammal I shall use the last named series.

The anterior and medial groups of nuclei.

The stria medialis thalami and ganglia habenulae. The older part of the stria or taenia medialis thalami, the olfacto-habenular fibers, derived from the basal olfactory area, nucleus taeniae (EDINGER), ascend together with fibers of the stria semicircularis along the fronto-lateral margin of the diencephalon. While the fibers of the stria semicircularis join the commissura amygdalae³⁾ (crossing in the commissura anterior), those of the tr. olfacto-habenularis, located medially to them, join the lateral side of the cortico-habenular tract which seems to be even larger than the basal or olfacto-habenular component of the stria medialis. Both sets of fibers run caudally over the dorso-medial margin of the thalamus (figs. 1—7), joined further backward by some fibers passing medially along the nucl. parataenialis (tr. olf. haben. medialis).

The *ganglion habenulae* (G.H. figs. 8—10) in which this taenia ends is distinctly divided in a lateral and medial nucleus. Both send fibers in-

¹⁾ KOHLBRUGGE. Das Gehirn von *Pteropus edulis*. Monatschr. f. Psychiatrie und Neurologie. Bnd. 12, p. 85 (1902).

²⁾ LE GROS CLARK. The structure and connections of the thalamus. Brain. Vol. 55, p. 406 (1932). (Figs. 8, 9 and 10.)

³⁾ The commissural component of the stria terminalis is very distinct in this animal and indicated in figs. 1 as St. S.

to the *tr. habenulo-peduncularis* or *fasc. retroflexus* (figs. 9—11).

A poorly myelinated component of this tract arises centrally from both nuclei. Coarser fibers collect somewhat more caudally than the finer central fibers. They do not arise centrally but medially and laterally. Some give the impression of being a deeper continuation of the stria itself. More caudally, some fibers from the dorso-caudal part of the nucleus thalami lateralis join this bundle at its lateral side to join the lamina medullaris interna (figs. 8, 9). In its descending course the fascicle passes through the nucleus parafascicularis (N.P.F. fig. 10). All its poorly myelinated fibers and some darker ones end in the ganglion interpedunculare at the ventral surface of the mesencephalon between the roots of the III nerve, partly crossing at the bottom (fig. 12. G.I.).

The *commissura habenularis*, composed of fibers from the stria medialis, also contains fibers turning again frontally on the other side, thus connecting the ventral parts of the telencephalon (nuclei taeniae) Tr. com. olfactoriae taeniae WALLENBERG (l.c.i. 1902 p. 177) or comm. superior telencephali, KAPPERS¹). As usual the commissure lies on the caudal level of the ganglion habenulare (C.H. fig. 10).

The *nucleus parataenialis* (P.T. fig. 1—4) appears at the dorsorostral end of the diencephalon, lying against the taenia medialis and extending backward until it is replaced by the nucl. medialis dorsalis (M.D. fig. 5). The nucleus parataenialis is very conspicuous in Xantharpyia and seems to receive (or give) fibers from (to) the anterior thalamic radiation, which may be striatal fibers.

Caudally the medial part of the nucleus antero-ventralis (A.V.N.) extends underneath it, separated from it by its medullated capsule (figs. 3 and 4). I am not sure if the nucleus parataenialis receives fibers from the olfacto-habenular tract, as stated by RIOCH² for Carnivora [contrary to GURDJIAN³]. In this animal the nuclei parataeniales of both sides do not form a commissural nucleus in the midline. The most frontal mid-nucleus in Xantharpyia arises from a fusion of a very distinct group of somewhat smaller cells extending from the rostral end of the thalamus medially to the parataenial nucleus and being apparently homologous to RIOCH's nucl. *paraventricularis anterior* (P.V.A. figs. 1 and 2). This smallcelled nucleus

¹) Vergleich: Anatomie des Nervensystems Part II, 1067.

²) RIOCH. Studies on the diencephalon of Carnivora. N^o. 1. The nuclear configuration of the thalamus of the dog and cat. Journ. of comp. Neur. Vol. 49, p. 13 (1929—'30). Part II. Certain nuclear configurations and fiber connections of the subthalamus of the dog and cat. Ibidem, p. 121. Part III. Certain myelinated fiber connections of the dog (*Canis familiaris*), cat (*Felis domestica*) and aevisa (*Crossarchus obscurus*). Ibidem, Vol. 53, p. 319 (1931).

³) GURDJIAN. Olfactory connections of the albino rat with special reference to the stria medullaris and anterior commissure. Journ. of comp. Neur. Vol. 38, p. 127 (1924—'25). The diencephalon of the albino rat. Studies on the brain of the rat II. Journ. of comp. Neur. Vol. 43, p. 1 (1927).

(not to be mixed up with the magnocellular periventr. nucleus with which, however, it may be functionally related) is very distinct in this animal and receives some of the finer septal (fimbrial) fibers of the fornix, as also the magnocellular nucleus does. It sends thin periventricular fibers downwards, and extends backwards to the *anterior group* of nuclei.

1. The most frontal nucleus of this group, the *nucleus antero-ventralis* (A.V.N. figs. 2, 3, 4) is contiguous to the former and establishes the main part of the anterior nuclei complex. It corresponds with the nucl. anterior a of WINKLER and POTTER¹). It is ovoid with the long axis extending ventro-medially beneath the caudal end of the nucleus parataenialis. Several bundles, mainly derived from the superior thalamic radiation, form a capsule over the nucleus. Other fibers, derived from the anterior thalamic radiation, enter its ventral side. Ventro-medially the tr. mammilo-thalamicus (M.T.) or bundle of the VICQ D'AZYR enters the nucleus (fig. 3) spreading all over it, passing laterally along the nucleus antero-medialis (A.M. fig. 3). The antero-ventral nucleus, which according to LE GROS CLARK (l.c.p. 440) sends fibers to the cingular cortex, is connected with the other nuclei of the anterior group. Besides, commissural fibers (C. fig. 5) are observed between its caudal segments.

2. The *nucleus antero-dorsalis* (A.D. figs. 3, 4, 5), smaller than the former, lies just lateral to the rostral portion of the stria medialis over the antero-ventral nucleus as a triangular mass of fairly large cells. Caudally its form becomes more flat, extending over the ventro-medial elongation of the nucleus antero-ventralis and forming a nucleus inter-antero-dorsalis in the midline over the bed-nucleus of the com. inter-antero-ventralis. Dorsolaterally to it the nucleus lateralis pars anterior appears (L., figs. 3, 4).

The nucleus antero-dorsalis is connected with numerous myelinated fibers of the superior thalamic radiation, while some fibers of the anterior thalamic radiation, passing the antero-ventral nucleus, seem to penetrate into it at its ventro-lateral border. A good many finer fibers from the ventro-medial projection of this nucleus run medio-ventrally, approaching the midline. They do not cross the midline, but seem to end in a nucleus commissuralis interantero-dorsalis.

3. The *nucleus antero-medialis* (A.M. fig. 3) is a rather diffuse mass of grey matter between the antero-ventral nucleus and the ventricle. The nuclei of both sides are ventrally connected, having a nucleus interantero-medialis between them. Some fibers of the tractus mammilo-thalamicus enter this area, though most of them run laterally to it to enter the nucleus antero-ventralis. Fine periventricular fibers (fig. 3) run through the medial portion of the antero-medial nucleus, while a few scattered fibers, derived from the anterior thalamic radiation, penetrate into it,

¹⁾ WINKLER and POTTER. An anatomical guide to experimental researches on the rabbit's brain. Amsterdam (1911), Plate XI (A.a.).

after having passed the rostral portion of the nucl. ventralis. It is, however, doubtful if fibers of the superior thalamic radiation connect with it.

At its origin from the nucleus mammillaris the *tractus mammillo-thalamicus* (M.T. figs. 3—9) consists of four fascicles. The three caudal fascicles arise from the nucleus mammillaris medialis or internus (I, fig. 10). The most frontal fascicle arises more laterally, perhaps from the nucleus mammillaris externus¹⁾ (E. fig. 10). Rostrally the fascicles join underneath the nucleus ventralis pars medialis (V.M. fig. 7, 8). On the level of the nucleus ventralis pars anterior (V.A. figs. 4, 5) its fibers turn dorsally (fig. 3). Some of them spread in the nucleus antero-medialis, but the great majority continue dorsolaterally into the nucleus antero-ventralis. Contrary to CAJAL's statement for Rodents, LE GROS CLARK's for Macroscelides²⁾ and RIOCH's observation in Carnivora, I could not trace its fibers in the nucleus antero-dorsalis. So far as concerns the anterior group of nuclei.

The *nucl. medialis dorsalis* (M.D., nucl. medialis a of VON MONAKOW) begins to show in figs. 5 and 6. Its rostral portion receives fibers from the anterior thalamic radiation passing the nucleus ventralis. A connection with the nucleus antero-dorsalis mentioned by GURDJIAN ('27) cannot be observed in my object. Dorso-laterally the nucleus medialis dorsalis is bounded by the nucl. lateralis (L. figs. 5, 6, 7), laterally by the nucl. ventralis (V.A. figs. 6, 7), and ventrally by the nucl. submedius (S.M. figs. 7 and 8). Dorsally to it the frontal part of the ganglia habenulae is seen (figs. 7, 8, 9). Fine fibers from the intermediate thalamic radiation seem to enter the ventro-lateral area of the nucleus medialis dorsalis, as do some bundles of the lam. med. interna or medialis (L.M.M. fig. 7, 8). It also receives fibers from the medial part of the lamina medullaris externa, which run dorsally, passing through the nucleus ventralis pars medialis (V.M. figs. 7, 8) and nucleus submedius (S.M. figs. 7, 8). A commissural connection with its fellow of the opposite side is feebly indicated at the dorsal side of the *nucleus medialis centralis* (M.C. fig. 8). Ventrally running fibers join the periventricular system.

A *nucleus paracentralis* and *nucleus centralis lateralis* cannot be separated from each other in this animal. Both may be represented by one mass of cells (C. fig. 8) located lateral to the nucleus medialis centralis, inbedded in the most medial fibers of the lamina medullaris interna. As stated by LE GROS CLARK ['30]³⁾ in Tarsius, the nucleus paracentralis forms the ventrolateral part of the nucleus medialis dorsalis. Ventro-laterally it is bounded by the nucleus ventralis, ventro-medially by the nucl. submedius. It is richly provided with numerous fibers of the intermediate thalamic radiation. Caudal to this level many fibers decussate.

¹⁾ Possibly this fascicle also gives rise to the tr. mammillo-tegmentalis (GUDDEN).

²⁾ LE GROS CLARK. Studies on the optic thalamus of Insectivora. The anterior nuclei. Brain. Vol. 52, p. 334 (1929).

³⁾ The thalamus of Tarsius. Journ. of Anatomy, Vol. 64, p. 371 (1930).

Another nucleus lying medially is the *nucleus submedius*¹⁾ (S.M. figs. 7, 8), a small but very distinct ovoid body, underneath the nucleus *medialis dorsalis* and dorso-medially to the nucleus *ventralis medialis*. It apparently corresponds to the nucleus *medialis ventralis* of LE GROS CLARK (cf. his fig. 10 l.c. '32 of the fruit bat, *Pteropus*). It is surrounded by a fiber-capsule, just as its Reptilian homologue, the nucleus *rotundus* (LE GROS CLARK). On its level a great many commissural fibers cross the midline (Co. fig. 8) underneath the nucleus *medialis centralis* (M.C. fig. 8). More fronto-ventrally in the midline lies the *Nucl. reuniens* (N.R. figs. 3, 4). This nucleus forms the dorsal border of the autonomic *nucleus paraventricularis magnocellularis* (P.M., fig. 2, 3).

Two more nuclei lying medially have to be mentioned. Both of them occur caudally near the fasc. *retroflexus*. The *nucleus parafascicularis* (N.P.F. fig. 10), described by GURDJIAN ('27) and characterized in my object by fairly large cells, may be considered as a caudal continuation of the nucleus *medialis dorsalis*. Medially it is bounded by the periventricular area and ventrally by the nucleus *ventralis* (fig. 10). At its lateral surface it seems to be enveloped by the most caudal division of the lamina *medullaris interna*. Cudo-laterally it borders upon the *praetectal area* (A.P. figs. 11—12), from which, however, it is very well differentiated, nor does it seem to have functional relations with this area. The thick tr. *habenulopeduncularis* pierces it, but no connections with the latter tract could be observed. It seems to receive fine fibers from the intermediate thalamic radiation. Somewhat thicker fibers connect this nucleus and the field H I of FOREL. This holds good especially for its ventral continuation, described as the *nucleus subparafascicularis* (N.S.P.F. fig. 10), which lies transversally on the dorsal surface of the field H I of FOREL. This flat nucleus is surrounded by numerous fine fibers and pierced by some bundles of the intermediate thalamic radiation.

The lateral group of nuclei.

On the caudal level of the nucl. *antero-dorsalis* (figs. 3, 4), dorso-lateral to it, the *nucleus lateralis pars anterior* (nucl. *lateralis a*, LE GROS CLARK) appears, soon increasing further backward (L. figs. 4, 5). Scattered bundles of the superior thalamic radiation connect with it. More caudally it continues in the intermediate (figs 6 and 7) and posterior part of the nucl. *lateralis* (figs. 10 and 11). All the lateral nuclei are bordered medially by the lamina *medullaris interna* or *medialis* (:L.M.M.).

The *nucleus lateralis pars intermedia* (b of LE GROS CLARK) is a strongly interwoven cellgroup; ventro-medial to the *pars anterior*, ventro-laterally bounded by the *formatio reticularis*, ventrally by the *pars arcuata* of the nucl. *ventralis* and medially by the lamina *medullaris interna* (fig.

¹⁾ It seems to me that this nucleus should be classified rather with the medial than with the ventral group.

7). The dorso-lateral fibers of the lamina medullaris externa reach it at its lateral border (fig. 7), while fine and scattered bundles of the superior and intermediate thalamic radiation, establishing connections with the cortex, originate from it.

The *nucleus lateralis pars posterior* (figs. 10 and 11), the caudo-lateral extension of the nucleus lateralis, is well defined in the plane of the nucleus geniculatus lateralis, bounded by the pulvinar laterally, the nucleus ventralis pars arcuata ventrally (figs. 8, 9). Rostrally bundles of the occipital radiation (fig. 7) penetrate its dorsal portion. At its ventral border fibers from the intermediate thalamic radiation and somewhat thicker fibers from the capsule of the medial geniculate body seem to connect with it. Finer fibers from the ventral portion of this nucleus run medially to join the lamina medullaris interna.

The *pulvinar* appears on the rostral level of the nucleus genicul. later. dorsalis as a dorso-lateral extension of this ganglion and of the lateral nucleus, but more richly interwoven by fibers (Pu. fig. 6—11). It is connected with the occipital and intermediate thalamic radiations, perhaps also with the capsule of the nucleus geniculatus medialis. Numerous fibers derived from the nucleus geniculatus lateralis reach or pass this area and run dorso-medially into the praetectal area and into the anterior colliculi or corpora quadrigemina anteriora (C.Q.A. fig. 12).

The *pulvinar*, very small compared with the underlying dorsal lateral geniculate ganglion (not labelled in figs. 8—11), is surrounded by the brachium of the superior colliculus, while its caudal part borders medially on the nucleus lateralis posterior, which again is bounded by the nucleus suprageniculatus (S.G. fig. 11) and the capsule of the nucleus geniculatus medialis. The posterior part of the pulvinar also gives fibers to the occipital radiation. Numerous bundles of the tractus geniculo-tectalis connect with it. Some bundles joining the brachium of the superior colliculus pass through this area and many fine fibers derived from the dorsal surface of this nucleus or from the brachium of the superior colliculus run vertically into it.

Behind and medially to the lateral nuclei the *area praetectalis* (A.P. fig. 11, 12) or *nucl. posterior thalami* is seen, bounded by the posterior part of the pulvinar laterally, the brachium of the superior colliculus dorsally, the comm. post. medially and the nucleus suprageniculatus ventrally (S.G. figs. 11, 12). Caudolaterally it reaches as far as the medial geniculate nucleus (G.M. fig. 12). The rostral portion of this nucleus is penetrated by the fibers from the nucleus geniculatus lateralis and also by the rostral capsule of the medial geniculate body. Its caudal part receives fibers from the medial geniculate nucleus.

The *nucleus suprageniculatus* (S.G. figs. 11, 12) is located underneath the nuc. lat. post. and over the most frontal part of the medial geniculate body and the caudo-lateral end of the ventral nucleus. (V.L. fig. 11). It is bordered medially by the praetectal area (A.P. fig. 11). Its close

proximity to the medial geniculate body, especially to the temporal radiation arising from this nucleus, suggest a functional relationship with the latter. On the other hand this nucleus seems to receive (or give) fibers from (to) the praetectal area.

The *formatio reticularis* laterally to the dorsal part of the lam. medullaris externa, between this and the mesial side of the transition of the capsula interna into the pes pedunculi (F.R. figs. 6—8), frequently broken up by the fibers of the thalamic radiations continues ventro-medially into the *zona incerta* (Z.I. figs. 6, 7). Caudally the pars lateralis of the nucleus reticularis [R. of M. ROSE '35] ¹⁾ is very broad. It is lost at the frontal side of the medial geniculate body. The numerous fibers passing through it made it difficult to trace the connections of the cells occurring in this area.

The ventral group of thalamic nuclei.

The rostral extreme or pars anterior of the *nucleus ventralis* (V.A. figs. 3—6) is surrounded by the *nucl. antero-ventralis* dorsally, the *formatio reticularis* laterally, the rostro-lateral portion of the *zona incerta* ventrally and the ascending fibers of the *tr. mammillo-thal.* medially. It gives scattered bundles to the anterior thalamic radiation. Besides, fine fibers, probably derived from the intermediate thalamic radiation, connect with it. Numerous fibers from the ventral portion of the lamina medullaris externa penetrate it in a dorso-lateral direction (figs. 3 and 4). Caudally, behind the ascending part of the mammillo-thalamic bundle (fig. 5), the ventral nucleus acquires a considerable medial thickening. This part, called *nucleus ventralis pars medialis*, extends underneath and behind the *nucl. submedius* (figs. 7, 8), establishing a commissural connection (Co. fig. 9). Further caudally the nucleus broadens out laterally as *nucl. ventro-lateralis* (V.L.) underneath the *nucl. ventralis p. arcuata* (V.AR., fig. 8). Caudally (fig. 11) the ventral nucleus borders on the rostral pole of the medial geniculate nucleus (figs. 11 and 12: GM.)

Compact cross-cut fibers of the rather small *lemniscus medialis*, running on the lateral side of the frontal (thalamic) bundle of the *brachium conjunctivum*, enter the nucleus ²⁾.

At its dorso-lateral portion it is pierced by fibers of the lamina medullaris interna. This portion borders on the *nucleus ventralis pars arcuata* which occupies a relatively large area (V.AR. figs. 7, 8), extending dorso-laterally. The dorso-lateral portion of this nucleus is penetrated by numerous fibers which fronto-laterally join the intermediate thalamic

¹⁾ ROSE, M. Das Zwischenhirn des Kaninchens. Extrait des Mémoires de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Série B: Sciences Naturelles. Cracovie (1935).

²⁾ The fact that the medial fillet is small and this nucleus so large in this animal shows that the ventral nucleus must serve also other purposes.

NAOKICHI SUZUKI: THE DIENCEPHALIC AND SOME OTHER SYSTEMS
IN XANTHARPYIA AMPLEXICAUDATA.



radiation. Fibers from the lamina medullaris externa join the pars arcuata at its ventro-medial and dorso-lateral border.

The description of the subthalamic and metathalamic parts and of the various systems of the pes pedunculi follows in the next issue of these Proceedings.

(To be continued).

Embryology. — Gebiss- und Zahnentwicklung bei der Irisforelle (*Salmo irideus*). VI. (Schluss) Zahnentwicklung. Von B. VAN DER EYKEN. (Communicated by Prof. M. W. WOERDEMAN.)

(Communicated at the meeting of May 23, 1936).

Nachdem wir ausführlich die Anlage des Gebisses als Ganzes studiert haben,¹⁾ werden wir jetzt die Entwicklung der einzelnen Elemente ins Auge fassen.

Zahnleiste. Die erste Frage, welche sich uns aufdrängt, ist diese: Entwickelt sich der Zahn bei der Irisforelle an einer Zahnleiste, wie z.B. bei den Reptilien und Säugetieren? Um diese Frage beantworten zu können werden wir zuerst nachzugehen haben, was wir unter einer Zahnleiste verstehen müssen.

Bei den Selachiern sind die Kiefer mit einem breiten Zahnfeld versehen, in welchem mehrere Reihen von Zähnen vorhanden sind. Von lingual nach labial wächst nun über dieses Zahnfeld eine Schleimhautfalte (Operkulum), welche den jungen, lingualen Zähnen als Schutz dient. Als eine höhere Entwicklungsphase betrachtet BOLK²⁾ dann jenen Zustand „wobei das untere Blatt dieser Schleimhautfalte mit dem Epithel der Spatia interdentalia verklebt“. Bei höheren Formen erkennt man diese „Operkulierung“ nicht mehr, sondern man sieht nur die Zahnleiste als eine Lamelle in die Tiefe wachsen; diese Zahnleiste ist dann zweiblätterig, das labiale Epithelblatt gehört dem Zahnfelde an und hat also Zahnbildungspotenz, während das linguale Blatt von der unteren Seite des Operkulum dargestellt wird und als gewöhnliche Mundschleimhaut jede Zahnbildungspotenz vermisst.

CARLSSON³⁾ beschreibt u.a. bei *Salmo salar* eine „ununterbrochen über die ganze Länge der zahntragenden Knochen sich ziehende“ Schmelzleiste.

Welche Verhältnisse liegen nun bei unserem *Salmo irideus* vor?

Auf der Zunge und im Oberkiefer, aber am deutlichsten im Unterkiefer sehen wir, dass das Schleimhautepithel im Gebiete, wo sich die Zähne

¹⁾ S. Proceedings Vol. 38, №. 8 und 10 (1935); Vol. 39, №. 2, 4 und 5 (1936).

²⁾ L. BOLK: Odontologische Studien I—III, Jena, Gustav Fischer (1913—14).

³⁾ A. CARLSSON: Zahnentw. bei einigen Knochenfischen. Zoolog. Jahrb. 1894, Abth. f. Morph. Bd. VIII.

entwickeln, eine keilförmige Leiste in die Tiefe sendet, welcher oberflächlich eine deutliche Rinne entspricht. Diese Leiste dehnt sich ohne Unterbrechungen nach hinten zu aus um hinter dem letzten Zahn allmählich untiefer zu werden und schliesslich ganz zu verschwinden. Ohne Zweifel hat CARLSSON eine ähnliche Leiste auch bei *Salmo salar* beobachtet, weil die Beschreibung und die Abbildungen, welche sie von dieser Leiste gibt, völlig mit den Bildern übereinstimmen, welche meine Präparate liefern. Die Zahnanlagen entwickeln sich am Boden dieser Leiste, die Ersatzkeime legen sich immer an ihrer lingualen Seite an; dass die Schmelzkeime der Ersatzzähne aber auch vom Boden der Leiste ausgehen können, wie CARLSSON sagt, dem kann ich für *Salmo irideus* nicht beistimmen.

Ist diese Epithelleiste nun aber als Zahnleiste aufzufassen?

Zwar entspricht sie der Definition, welche CARLSSON von einer Zahnleiste gibt: „.....eine vom Mundhöhlenepithel ausgehende Leiste, die in das Mesoderm eindringt, sich *ununterbrochen* längs des später zahntragenden Mundtheiles hinzieht und die Schmelzorgane der Zähne hervorbringt“. Die Zähne legen sich zwar am Boden der Epithelleiste an, aber sie wachsen, der lingualen Seite der Leiste entlang, empor, während die Ersatzkeime immer lingualwärts von ihr liegen. Wenn wir aber diese Befunde mit der Hypothese BOLKS über das Entstehen der Zahnleiste in Einklang bringen wollten, so würden wir annehmen müssen, dass die Operkulisierung hier in labio-lingualer Richtung stattgefunden hätte, weil nur in diesem Falle das linguale Epithelblatt die Zahnbildungspotenz besitzen würde. Unsere Leiste besteht aber auch nicht aus zwei Epithelblättern, sondern zeigt genau denselben Bau, wie das oberflächliche Epithel. Nach den Auffassungen BOLKS würden wir also nicht von einer wirklichen Zahnleiste reden dürfen. Am besten scheint es mir darum nicht den Namen „Zahnleiste“ zu gebrauchen, sondern einfach von einer Epithelleiste zu reden.

MARCUS¹⁾ beschreibt, wie bei den *Gymnophionen* im Unterkiefer die Zahnleiste durch eine Torsion der Mandibularbogen beim Wachstum des Embryos entsteht, welche nach der Verschmelzung der beiden Seiten zum Unterkiefer noch andauert. Inwiefern bei der Entwicklung der Forelle von einer solchen Torsion in diesen Mundteilen die Rede sein könnte, ist mir unbekannt, aber die tiefe Rinne und die entsprechende Epithelvertiefung lassen mich an einen Torsionsprozess denken.

Auch auf der Zunge sind die Epithelleisten deutlich ausgeprägt; im Oberkiefer sind sie aber viel untiefer und am Gaumen sehr wenig ausgeprägt. An den andern zahntragenden Stellen fehlen sie ganz und gehen die Epithelzapfen sofort von der Oberfläche aus.

Histogenese. Wie, nach den Untersuchungen von RÖSE, CARLSSON, WOERDEMAN u. a. jetzt wohl genügend bekannt ist, fängt die Entwicklung

¹⁾ H. MARCUS: Zur Zahn- u. Gebissentw. bei *Gymnophionen*. *Morphol. Jahrb.* Bd 68, Heft 3/4 (1931).

der Zähne im Epithel an: die Zellen des *Stratum cylindricum* sind auf der Stelle, wo der Zahn sich anlegt, etwas in die Länge gestreckt und liegen derart, dass ein, einer Geschmacksknospe ähnliches Gebilde entsteht, weshalb WOERDEMAN dieses Stadium als „*Epithelgemma*“ bezeichnet. Wo eine Epithelleiste vorhanden ist, bildet sich diese erste Anlage am Boden der Leiste oder etwas mehr nach der lingualen Seite zu. Schon sehr bald aber wird die Gemma von den Mesenchymzellen, welche sich inzwischen unter der Gemma angehäuft haben, eingestülpt und es entsteht das Papillenstadium. Einige Untersucher, LEVY und WOERDEMAN, betrachten das Mesenchym als das aktive Element bei der Papillenbildung; RÖSE dagegen meint, dass die Bindegewebzellen dem andringenden Epithel nur „*siegreichen Widerstand*“ leisten und gewissermassen vom Epithel umwachsen werden. Fig. 1 stellt eine junge Papille dar; Fig. 2 zeigt eine ältere Papille, an welcher sich schon eine äussere und innere Schmelzmembran unterscheiden lässt. Auch die Bindegewebzellen zeigen schon mehr oder weniger eine Anordnung längs der inneren Epithelschicht.

Die junge Zahnanlage sinkt nun allmählich in die Tiefe, durch einen Epithelzapfen mit dem Oberflächenepithel in Verbindung bleibend. Nachdem die Zähnchen älter werden, flachen sich die peripher gelegenen Bindegewebzellen ab, färben sich dunkler und können jetzt Odontoblasten genannt werden. In Fig. 3, wo sich schon eine grosse Dentinscherbe gebildet hat, kann man sehen, wie die Odontoblasten Protoplasmaausläufer ins Zahnbein senden, zumal an der Spitze der Odontoblastenanhäufung sind zwei solcher TOMES'schen Fasern gut sichtbar.

Die Zellen des Schmelzorganes sind vom Anfang an höher, als die kubischen Epithelzellen der basalen Schicht der Schleimhaut. Die Mundzähne bilden fast alle einen Winkel mit der Oberfläche und zwar so, dass in dem stumpfen Winkel sich der Ersatzzahn entwickelt. Mit einer Seite liegen sie also von der Oberfläche abgewandt und an dieser Seite sind die Zellen der äusseren Schmelzmembran höher und schärfer begrenzt als an der andern Seite, wie in Fig. 4 sichtbar ist. Auch sind hier zwischen den äusseren und inneren Epithelschichten einige flachen Epithelzellen sichtbar. Die innere Schmelzepithelschicht zeigt in den älteren Keimen, bei denen Dentin vorhanden ist, typische Veränderungen, indem sich am Gipfel die Zellen in die Länge und in die Breite dehnen, durchsichtiger werden und manchmal Vakuolen zeigen (Fig. 4). Die Kerne schwollen an, färben sich heller und rücken peripherwärts. In Fig. 4 ist die Grenze zwischen den unveränderten Zellen und den auf die beschriebene Weise veränderten Zellen am Gipfel, sehr scharf. Auf Schnitten, welche diese Ameloblastenschicht in dieser Höhe quer treffen, bekommen wir dann ein typisches Bild, weil die hell gefärbten Zellen den von der äusseren Epithelschicht geformten Kreis wie eine Rosette ausfüllen. Ohne Zweifel haben die genannten Veränderungen etwas mit der

Schmelzbildung zu tun; der Schmelz ist aber durch das Entkalken der Präparate aufgelöst. In allen Schnitten, wo die beschriebenen Ameloblasten vorliegen, treffen wir aber eine Spalte zwischen diesen Zellen und dem Dentinmantel an, als Zeichen dafür, dass hier wahrscheinlich Schmelz vorhanden gewesen ist. Auch sehen wir sehr oft bei den dentinhaltigen Zähnen, dass die Spitze, wie mit einem Messer, scharf abgeschnitten ist, während die obere Fläche dann oft eine dunkel gefärbte Scheibe oder, wie in Fig. 4, ein mützenartiges Gebilde trägt. WOERDEMAN beschreibt¹⁾ bei *Crocodilus porosus* einen ähnlichen Befund, nämlich „eine sehr stark (selbst bis schwarz) färbende Substanz, die zwischen dem Dentin und den Ameloblasten bei jungen Zahnkeimen angetroffen wird“. Er deutet diese Substanz als ein Vorstadium des Schmelzes, welches der Entkalkung Widerstand entgegengesetzt hat. Wahrscheinlich müssen auch die mützenartigen Gebilde, welche ich vielfach an der Spitze der entkalkten Zähne fand, als solches, oder als chemisch umgewandelter Schmelz gedeutet werden.

Sternförmige Schmelzpulpa-Zellen sind ohne Zweifel bei *Salmo irideus* vorhanden, ich sah sie aber nur mit Sicherheit im horizontal geschnittenen Präparat 49, wo bei starker Vergrösserung zwischen der inneren und der ausgebuchteten äusseren Schmelzmembran ein Gewebe von sternförmigen Epithelzellen sichtbar ist.

Im älteren Zahne sehen wir, dass die Zahnpulpa sich lockert, die Odontoblastenzahl reduziert wird und die jetzt spindelförmigen Zahneinbildner sich in der Länge dem Dentin anschmiegen. Die Zahnbasis, die allmählich näher an den Knochen gerückt ist, verwächst schliesslich mit diesem. Ich kann FRIEDMANN²⁾ nicht beistimmen, wenn er sagt: „Es findet somit die HERTWIG'sche Theorie aufs Neue Bestätigung, dass die Kieferknochen ein Produkt der Zähne wären und ursprünglich nur aus deren Zahnsockeln entstanden seien“. Bei *Salmo irideus* sind nämlich schon im Stadium E Kieferknochen sichtbar, während von einer Ossifikation der Zähne noch nicht die Rede ist. In allen Stadien sehen wir Kieferknochen und Zähne sich einzeln entwickeln und erst viel später mit einander in Verbindung treten. Auch CARLSSON fand, dass kein Zusammenhang zwischen der Zahnbildung und dem Auftreten der zahntragenden Knochen besteht.

Beziehung zum Epithelzapfen. Wir haben gesehen, wie im Unterkiefer, wo das oberflächliche Epithel sich zu einer Epithelleiste vertieft hat, die erste Papillenanlage am Boden der Leiste stattfindet und allmählich in die Tiefe sinkt. Während der Keim aber in die Länge wächst, wird er mit seiner Spitze an die Oberfläche rücken und wir werden jetzt nachgehen,

¹⁾ M. W. WOERDEMAN: Beiträge zur Entwicklungsgesch. von Zähnen u. Gebiss der Rept. Beitrag IV. Archiv f. microsc. Anat. Bd 95, Abt. I (1921).

²⁾ E. FRIEDMANN: Beiträge zur Zahntentw. der Knochenfische. Morph. Arb. VII (1897).

welche Beziehungen hierbei zum Epithelzapfen und der Epithelleiste bestehen.

Der ältere Zahn, der noch nicht durch das oberflächliche Epithel durchgebrochen ist, zeigt meistens eine leicht distalwärts gekrümmte Gestalt, wobei seine Spitze nach hinten weist, während der Zahn ausserdem quer im Kiefer steht, mit seiner Spitze ein wenig lingualwärts gewandt. Wenn wir die betreffenden Schnitte von vorn nach hinten verfolgen, wie dies in Fig. 5 schematisch dargestellt ist, so sehen wir, dass die Zahnbasis sich noch unter dem Boden der mit dem Epithelzapfen ver-



Fig. 5. Geschmacksknospe bei *.

längerten Leiste befindet, aber dass der Zahn wegen seiner Breite die Epithelzellen zur Seite gedrungen hat. Der Epithelstrang ist dadurch beträchtlich dicker geworden. Verfolgen wir die Schnitte weiter, so sehen wir, dass die linguale Seite des Zpfens und der Leiste ausgebuchtet wird und etwas höher entsteht eine Falte zwischen der, von der lingualen Seite der Leiste gelieferten, äusseren Epithelschicht und dem medialen Oberflächenepithel, welche Falte von Bindegewebe ausgefüllt ist. Regelmässig sehen wir auf der Stelle, wo diese Falte sehr schmal wird, eine Geschmacksknospe im Epithel liegen. Indem der Zahn sich der Oberfläche nähert wird die Falte schmäler und schliesslich legt sich die äussere Schmelzmembran an die basale Epithelschicht, wobei sich die Zellen oft abplatten. Der Zahn und sein Schmelzorgan sind jetzt lingual von der Epithelleiste geraten, welche letztere zum Teile wieder im Schnitte sichtbar ist. Die Falte verstreckt nun in den folgenden Schnitten und die Zahnspitze kommt dadurch mit der inneren Schmelzmembran ganz in das Oberflächenepithel zu liegen, während die äussere Schmelzepithelschicht wieder zum basalen Epithel wird, was sie von vornherein schon war. Wenn die Ameloblastenrosette aus dem Gesichtsfelde verschwunden ist, bekommt das Oberflächenepithel bald seine normale Dicke. Manchmal reicht der Zahn nicht bis an das Oberflächenepithel, sondern bleibt mit seiner Spitze darunter, jetzt natürlich ringsum von der inneren und äusseren Epithelschicht begrenzt.

Die Zungenzähne verhalten sich ganz ähnlich, nur strecken sie sich öfters gerade nach hinten aus, wodurch die Spitze in dem oberflächlichen Teile der Epithelleiste liegen bleibt. Wenn der nächstfolgende Zahn im Gesichtsfelde erscheint, geht dessen Anlage also scheinbar vom Schmelzorgane des vorangehenden Elementes aus, während sie sich in der Tat am Boden der Leiste entwickelt.

Im Oberkiefer sind die Verhältnisse ähnlich wie im Unterkiefer, während an den übrigen Stellen, wo sich Zähne anlegen und überall da, wo ganz

gerade Zähne vorliegen, die Beziehungen zum Epithelzapfen ganz einfach sind. Auch in diesen Fällen entwickelt sich der Zahn innerhalb des Stranges; während der Keim emporwächst verschwinden die Zapfenepithelzellen, oder drängen sich zwischen innere und äussere Schmelzmembranen.

Ersatzzahnbildung. Die Mehrzahl der Ersatzzähne liegt mit ihren Vorgängern nicht in einer Frontalebene, sodass wir in unsren Frontalschnitten nur ausnahmsweise Zahn und Ersatzkeim in einem Schnitte neben einander liegen sehen. Die Untersuchung der Beziehungen zwischen beiden wird dadurch erheblich erschwert. Doch gibt es einige Fälle, in welchen ein einziger Schnitt wichtige Schlüsse erlaubt. Fig. 6 zeigt eine junge Ersatzkeimanlage und nachdem wir die vorangehenden Schnitte zu Rate gezogen haben, können wir mit Sicherheit sagen, dass diese kleine Papille in der äusseren Epithelschicht des alten Zahnes entstanden ist. In vielen andern Fällen ist auch deutlich sichtbar, dass immer die äussere Schmelzmembran des erwachsenen Zahnes die jüngste Anlage des Ersatzkeimes enthält. Wir haben schon eher gesehen, dass die Zellen des äusseren Schmelzepithels an der Seite, wo sich das Ersatzzähnchen anlegen wird, vom Anfang an etwas höher und schärfer begrenzt waren, als an der andern Seite; dies steht zweifellos mit der Ersatzzahnbildung im Zusammenhang. In Querschnitten sehen wir, dass zuerst die äussere Schmelzmembran sich noch weiter ausbuchtet, wie in Fig. 3 der Proceedings Vol. 38, No. 8 (1935) deutlich sichtbar ist. Die Papillenbildung der Ersatzkeime findet in durchaus gleicher Weise statt, wie die der ersten Zähne; es bildet sich zuerst eine Gemma, wie Fig. 7 zeigt, welche bald von einigen Bindegewebszellen eingestülpft wird. Danach dreht sich die Papille mit ihrem Gipfel nach der Oberfläche zu, um in dieser Richtung emporwachsen zu können. Wenn wir in unsren Präparaten einen Zahn aufsuchen, der neben sich ein papillenförmiges Ersatzzähnchen hat, so sehen wir meistens, dass beide in demselben Epithelzapfen eingeschlossen liegen; der Ersatzkeim hat also scheinbar, ebenso wie sein Vorgänger, die Epithelzellen des Stranges zur Seite gedrängt. Bei sehr jungen Ersatzpapillen aber, finden wir auch schon einen verbreiterten Epithelstrang, obwohl von einem aktiven Verdrängen der Zellen durch den Keim nicht die Rede sein kann; wahrscheinlich ist es darum, dass sich der Epithelzapfen, von der Ersatzzahnanlage angeregt, verbreitert hat. Einmal, im Präparate Q, sah ich zwischen Ersatzpapille und Oberflächenepithel eine Bindegewebssalte, welche noch nicht verstrichen war, weil der Epithelstrang sich offenbar noch nicht verbreitert hatte.

Resorption. Indem der Zahn älter wird, platten sich die Zellen des Schmelzorgans ab; sowohl die Ameloblasten, wie die Zellen der äusseren Schmelzmembran nehmen zuerst eine kubische Form an, werden danach zum Pflasterepithel, um schliesslich zu atrophieren. Innerhalb des Zahnes werden die Odontoblasten immer spärlicher.

B. VAN DER EYKEN: GEBISS- UND ZAHNENTWICKLUNG BEI DER
IRISFORELLE (*SMO IRIDEUS*).



Fig. 1. Vergr. $\pm 215 \times$. Frontalschnitt durch den Unterkiefer (Präp. 48). Junge Zahnpapille.



Fig. 2. Vergr. $\pm 260 \times$. Frontalschnitt durch das Vomergebiss (Präp. N). Etwas weiter entwickelte Papille.



Fig. 3. Vergr. $\pm 210 \times$. Frontalschnitt durch das Vomergebiss (Präp. O). Junger Zahn. Die Kerne der inneren Schmelzepithelzellen sind peripherwärts gerückt. Die Odontoblasten senden TOMES'sche Fasern ins Dentin hinein.



Fig. 4. Vergr. $\pm 200 \times$. Frontalschnitt durch den Unterkiefer (Präp. 48). Junger Zahn. Am Gipfel des Schmelzorgans die typischen Ameloblasten, welche hier Vakuolen enthalten.



Fig. 6. Vergr. $\pm 190 \times$. Frontalschnitt durch den Unterkiefer (Präp. G). Erster Anfang der Ersatzzahnbildung.



Fig. 7. Vergr. $\pm 190 \times$. Frontalschnitt durch den Zwischenkiefer (Präp. G). In der Mitte eine Gemma, als erste Ersatzzahnanlage. Rechts eine Ameloblastenrosette.



Fig. 8a. Vergr. $\pm 80 \times$. Frontalschnitt durch die Zunge (Präp. S). Uebersichtsphotographie.



Fig. 9. Vergr. $\pm 80 \times$. Frontalschnitt durch den Zwischenkiefer (Präp. S). Stark hervortretende Geschmacksknospen.

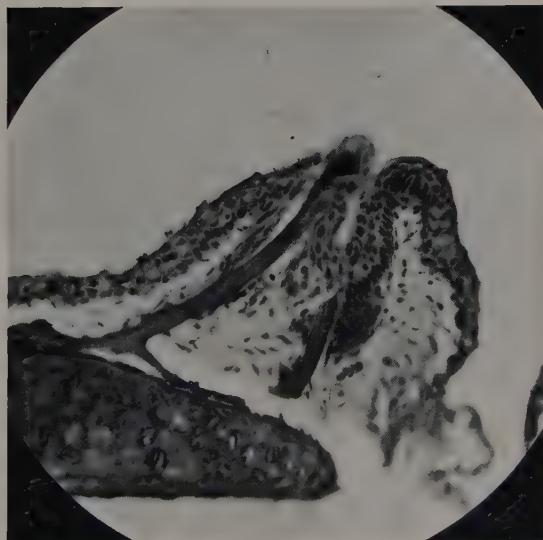


Fig. 8b. Vergr. $\pm 235 \times$. Teil der Fig. 8a. Eindringen der Epithelzellen in die der Resorption anheimgefallenen Zähne.

Schon ehe die zuerst angelegten Zähne zum Durchbruch kommen, fallen sie der Resorption anheim, welche ungefähr zur halben Höhe des Zahnes anfängt und zwar meistens an der Seite, wo sich der Ersatzkeim angelegt hat; nur in wenigen Fällen fängt die Resorption an der andern Seite an.

In den angefressenen Elementen fallen zumeist die trübe aussehenden, vielkernigen Riesenzellen auf, welche bald längs der inneren Dentinwand, bald willkürlich im Zahninneren liegen. Auch WOERDEMAN beschrieb sie bei *Crocodilus porosus* ¹⁾: „In dem Gebiete der Resorption sieht man grosse vielkernige, stark mit Eosin gefärbte Zellen in den bekannten HOWSHIP-schen Lakunen. Es sind die sogenannten Riesenzellen (VIRCHOW) oder Myeloplaxen (ROBIN) oder Osteoklasten (KÖLLIKER). Woher diese Zellen kommen, ist nicht mit Sicherheit zu sagen“. Der genannte Untersucher fasst sie als phagozytäre Bindegewebzellen auf. In verschiedenen meiner Präparate ist deutlich sichtbar, wie diese Riesenzellen aus dem Bindegewebe, durch die beschädigte Zahnwand in den Zahn hinein kriechen; sie werden also jedenfalls von aussen in den Zahn eingeführt und gehören zu der Gruppe der Makrophagen.

In der Mehrzahl der Fälle findet die Resorption in der Weise statt, dass zuerst der mittlere Teil des Zahnes verschwindet, wodurch die Spitze von der Rest abgelöst wird, sodass von der Zahnbasis auf dem Schnitte nur zwei kurze Knochenspangen übrig bleiben. Ob die Zahnspitze, welche jetzt lose im Oberflächenepithel zu liegen kommt, später ausgestossen, oder weiter resorbiert wird, kann ich nicht entscheiden. Einige Male sah ich der losen Spitze eine Riesenzelle angehaftet, als Zeichen dafür, dass die Resorption an dieser Stelle noch nicht beendet war.

Die Figg. 8a und b zeigen, wie durch das entstandene Loch Epithelzellen gleichsam hinein wachsen, während in diesem Schnitte keine Riesenzellen sichtbar sind. Die labialen Epithelzellenanhäufungen stellen die ganz peripher getroffenen Ersatzzahnanlagen dar.

Ueber die Beziehungen zwischen Ersatzzahn und Resorption lässt sich nichts sagen. Regelmässig können wir sehen, dass sich der Ersatzzahn mit seiner Basis quer nach dem übrig gebliebenen Zahnsessel seines Vorgängers hinschiebt; in wiefern er aber zum Ersetzungsprozesse den Anstoss gibt, lässt sich aus den Präparaten nicht erraten.

Bemerkung. Regelmässig finden wir zwischen den Zähnen im Epithel die Geschmacksknospen liegen, welche aber in der Larve *S* ein typisches Bild liefern, weil sie hier besonders stark hervortreten. Fig. 9 stellt eine Photographie eines Frontalschnittes durch den Zwischenkiefer dieser Larve dar, welche diese Eigentümlichkeit deutlich hervorhebt.

Anat. Embryol. Institut d. Univ. Amsterdam.

¹⁾ M. W. WOERDEMAN: Beiträge zur Entw.gesch. von Zähnen u. Gebiss der Rept. I—V. Archiv f. microsc. Anat. Bd 92. Abt. I (1919) u. Bd 95. Abt. I (1921).

Medicine. — *The isolation of typhoid bacilli from water.* By A. CHARLOTTE RUYS. (Communicated by Prof. W. A. P. SCHÜFFNER).

(Communicated at the meeting of May 23, 1936).

In several publications WILSON and BLAIR¹⁾ recommended a new medium containing glucose, bismuth, sulphite, phosphate, iron, brilliant-green, and nutrient agar for the isolation of typhoid bacilli from various materials. They succeeded in isolating typhoid bacilli from sewage and raw river-water, which up till that time was extremely difficult or altogether impossible. HOUSTON²⁾ (Metropolitan Water Board London), using WILSON and BLAIR's medium, on several occasions obtained typhoid bacilli in pure culture from raw Thames-water and from London sewage. After an outbreak of paratyphoid-B in Epping he regularly cultivated paratyphoid-B-bacilli from the sewage during nearly a year. So this medium opens a new field for the study of the epidemiology of enteric fevers.

Medium. We have employed WILSON and BLAIR's old standard medium, the formula of which is as follows:

100 c.c. nutrient 3 per cent. agar, 20 c.c. glucose-sulphite-phosphate mixture (a solution of 6 grm. bismuth-ammonium-citrate in 50 c.c. aqua destillata is neutralized and added to 100 c.c. of a 20 per cent. exsiccated sodium sulphite solution, then 10 grm. sodium phosphate and after cooling 10 grm. glucose in 50 c.c. distilled water are added), 1 c.c. 8 per cent. ferrous sulphate solution and 0.5 c.c. 1 per cent. solution of brilliantgreen.

On this medium typhoid and paratyphoid bacilli grow in black colonies with a metallic halo. The growth of most strains of *B. coli* is inhibited, but there are some strains of *B. coli* which grow just like typhoid colonies.

When trying out the medium, we first had some difficulties in obtaining constant results, although we carefully observed POT's³⁾ prescription never to use anything but a freshly prepared ferrous sulphate solution. We finally found that this precaution is not sufficient because the crystals contained too much ferric sulphate which spoiled the medium. After using ferrous sulphate which had been precipitated in alcohol and which gave a perfectly clear solution, these difficulties were overcome.

¹⁾ Jl. of Hygiene, Vol. 26, p. 374 (1927) and Vol. 31, p. 138 (1931).

²⁾ Reports Metropolitan Water Board, London (1929—1931).

³⁾ Geneesk. Gids, p. 985 (1935).

Atypical strains. All publications on this subject agree that true typhoid colonies should be black with a metallic halo. However, we found a strain isolated from the blood and the urine of a typhoid patient, which could not reduce the iron- and bismuth compounds to the black sulfide. The strain grew quite well on the medium but its colonies were green even if they grew wide apart from each other (fig. 1). This strain, now 8 months in culture, always remained the same. It is possible, however, to make it grow in black colonies (without an halo), if it is cultivated under anaerobic conditions. A return to aerobic conditions causes the colonies to turn from black to green after the lapse of a few days. As the bismuth sulfide, when once it is formed, remains quite constant, this change of colour must be due to the black iron sulfide being oxidated to iron sulphate.

Among 98 strains in the collection of Prof. VAN LOGHEM, Prof. SNIJDERS and our own we found a second strain which grew in green colonies only. This strain was isolated from the blood of a typhoid patient. Neither of the two green growing strains showed any other peculiarities.

Consequently, true typhoid colonies may be occasionally overlooked, if subcultures are made from the black colonies with an halo only, and the use of another medium besides that of WILSON and BLAIR is essential for the examination of stools and urine; for the examination of infected water WILSON and BLAIR's will have to suffice, as the other ones are no good at all.

Examination of water.

A. During a milkborn outbreak of typhoid fever occurring in a little village, the milk was asserted to have been contaminated by water from a certain ditch. This ditch communicated with another one to which for some time the stools and urine of a non-recognized typhoid patient had found their way (see PEETERS, RUY'S and EPHRAIM) ⁴⁾.

On February 13th three samples of water were collected from the polluted ditch, just below the sheet of ice which covered the water since a few days. Typhoid bacilli were recovered from 2 out of the 3 samples by inoculating the surface of a WILSON and BLAIR plate with one drop of water.

Four days later the same method revealed the presence of typhoid bacilli in 3 out of 7 samples collected in various parts of both ditches. The modified method of spreading the centrifugate of 20 c.c. water over two WILSON-BLAIR plates yielded no better results: two negative samples remained negative, two positive ones positive. The other media (Endo-plates, MULLER tetrathionate broth, brilliantgreen-Esbach-broth) all yielded negative results. No other experiment could be tried because the ditches were disinfected after the sampling.

⁴⁾ Ned. Tijdschr. v. Geneesk. p. 2353 (1936).

B. More complete experiments were carried out in a little town in the neighbourhood of Amsterdam, where every year several cases of typhoid fever continue to occur, without any traceable source of infection. Through the town passes a narrow and shallow canal for shipping. There is no sewerage but a tub-system. Notwithstanding prohibitory bye-laws the inhabitants persist in their objectionable custom of emptying into the canal the tubs containing nightsoil. For years it has been a widespread notion that a person who falls into this canal is liable to acquire typhoid fever. Once every fortnight the canal is flushed with clean water, though quite insufficiently to remove the dirt.

1. On March 26th 2 samples of water from different parts (K and Mg) were examined. Twenty five c.c. of water were mixed with equal parts of the medium and 10 c.c. of water with 25 c.c. of the medium and poured into plates. In order to obtain a better concentration of the bacteria the centrifugate of 60 c.c. of water was spread over 6 WILSON-BLAIR plates. As we had underestimated the pollution of the water, after two days the plates were overgrown with black colonies. The EIJKMAN-test also showed a heavy pollution of the water; in both samples 0.0001 c.c. yielded a positive reaction. From the cultures of the water at K 54 black colonies were picked off and one could be identified as a typhoid colony (biochemically and serologically). Of the water of Mg 50 black colonies were subcultured, but none contained typhoid bacilli. The positive result in K only showed that typhoid bacilli could be isolated from the water; it did not allow of an evaluation of the degree of contamination. In the following experiments we were careful to dilute the water in order to raise better isolated colonies.

2. On April 1st we took 3 samples of water from the main canal at K, KI (at a distance of 30 M from K) and Mz. This time 5 c.c. of water were mixed with 45 c.c. of the medium and 2 c.c. with 48 c.c. of the medium and both poured into dishes. Furthermore the sediment of 80 c.c. of water was spread over 8 WILSON-BLAIR plates. The results are shown in table I. In many plates black colonies were so numerous that only a portion of them could be examined. These experiments showed, that at K and KI the water was heavily contaminated with typhoid bacilli. When working with this strongly polluted water we found that the dilution method gave better results than the plating out of sediment. The latter method, therefore, was discarded in the following experiments.

3. On April 14th 3 samples were examined, one taken at K, another at Kg some 200 M distant and a third from another part of the town not corresponding directly with the main canal (E). At Kg the water from the surface and also from a depth of nearly 60 cM was examined. The table shows that this time the water was again found infected at K and surroundings, but not so heavily as two weeks earlier. There was no difference between the water at the surface and below it. At E no typhoid bacilli could be demonstrated.

TABLE I.

Date	Place	EIJKMAN titer	Quantity of water examined	Number of black colonies	Number of typhoid colonies
26-3-36	K	0.0001	25 c.c.		
			10 c.c.	> 54	1
			60 c.c. *)		
	Mg	0.0001	25 c.c.		
			10 c.c.	> 50	0
			60 c.c. *)		
1-4-36	K	0.001	5 c.c.	21	> 4
			2 c.c.	19	> 8
			80 c.c. *)	> 100	> 13
	KI	0.001	5 c.c.	16	11
			2 c.c.	8	7
			80 c.c. *)	> 100	> 15
	Mz	0.0001	5 c.c.	6	0
			2 c.c.	6	2
			80 c.c. *)	> 100	1
14-4-36	K	0.0001	5 c.c.	29	3
			0.5 c.c.	3	3
	Kg	0.01	5 c.c.	30	7
			0.5 c.c.	0	0
	Kg deep	0.0001	5 c.c.	27	6
			0.5 c.c.	2	2
			0.05 c.c.	1	1
	E	0.001	5 c.c.	12	0
			0.5 c.c.	6	0
6-5-36	K	0.001	5 c.c.	12	6
			0.5 c.c.	6	4
	Mg	0.001	5 c.c.	17	0
			0.5 c.c.	5	0
	T	0.0001	5 c.c.	12	0
			0.5 c.c.	44	0
9-5-36	Kw	0.0001	5 c.c.	92	7

*) Centrifugated.

4. On May 6th a new series of experiments was made, the weather having changed from cold in the previous month to warm and sunny during the first week of May. The temperature of the water was $14\frac{1}{2}^{\circ}$ C. Samples were taken again at K, for the second time at Mz and at T in a canal only indirectly in contact with the main canal. The pollution, as shown by the EIJKMAN-test, was as heavy as in the previous months.

The figures in the table show that at K the contamination of the water with typhoid bacilli was of the same degree as three weeks earlier. Neither at T nor at Mz typhoid bacilli could be isolated this time.

Three days later typhoid bacilli were isolated from a sample of water collected at Kw at a distance of 250 M from K.

These experiments show that the water in the neighbourhood of K must have been continuously contaminated. Up till the present the source of this infection has not been detected. It is difficult to ascertain how long the typhoid bacilli can survive in the water. In the outbreak described under A (see PEETERS, RUYS and EPHRAIM) typhoid bacilli were isolated from the ditch 24 days after the last day the stools had found their way into the ditch. The weather in this period had been rather cold with some days of heavy frost.

In order to get an impression of the longevity of typhoid bacilli under different temperature conditions, some experiments were made with naturally contaminated water. Various samples of this infected water were divided into two parts. One group of them were put in the refrigerator (6° C.), the others in the incubator (24° C.). After 6 days exposure to the temperature of the incubator the typhoid bacilli invariably had disappeared in all of the 6 samples. All of the 6 samples kept in the refrigerator for 5 or 6 days always yielded some typhoid colonies, though less than the recently collected water. Once only we could isolate typhoid colonies from water which had been in the refrigerator for 10 days. From 5 c.c. of the sample of water collected at K on April 1st (which yielded a very large number of typhoid colonies; see pag. 783) fifteen colonies were cultivated on April 6th and seven on April 11th. Five days later no more typhoid bacilli could be recovered from this sample. So the temperature has a considerable influence on the longevity of typhoid bacilli in naturally infected water under laboratory conditions. Further experiments will have to be carried out in order to ascertain which are the other important factors playing a part in this process (protozoa, overgrowing by other bacteria).

SUMMARY.

The medium of WILSON and BLAIR enables us without difficulty to isolate the typhoid bacilli from infected water.

In preparing the medium it is necessary to take care that the ferrous sulphate solution contains no ferric salts.

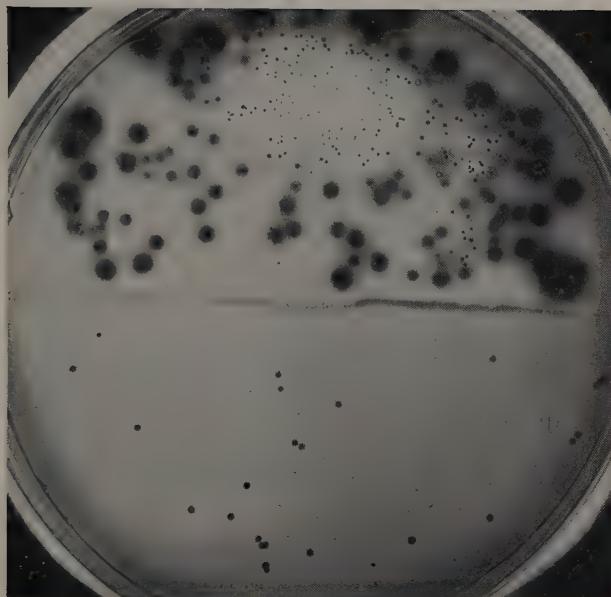
There are a few strains of typhoid bacilli which in every respect conform to type but which nevertheless grow in green colonies on WILSON and BLAIR's medium and not in the black ones which are supposed to be characteristic of this species.

Amsterdam, May 1936.

(From the laboratories of the
City Health Department, Amsterdam.)

A. CHARLOTTE RUYS: THE ISOLATION OF TYPHOID BACILLI FROM
WATER.

I



II

Fig. 1.

WILSON and BLAIR's medium incubated at 37° C during 48 hours.

- I. typical typhoid colonies.
- II. green growing strain.

Mathematics. — Ricci-Calculus and Functional Analysis. By D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of May 23, 1936).

In this paper a short sketch is given of a general method for treating differential geometric problems in function-spaces. On a later occasion I hope to return upon the question in greater detail, and to give more references to existing literature. Here I might only mention a recent paper of KAWAGUCHI¹), which contains a rather extensive list of older literature, and in particular to the papers of A. D. MICHAL, mentioned there. The main idea of our method consists in taking as contravariant functions (or vectorials) *absolutely additive set functions* instead of ordinary functions. This allows to unify and to generalize the different groups of functional transformations ("HILBERT"-, "FREDHOLM"- and "PICARD"-transformations) and to avoid the uninvariant δ -symbols, used by KAWAGUCHI.

§ 1. *Algebra in function-space.*

1. Let R be a separable topological space, x, y, z, \dots its elements ("points"), X, Y, Z, \dots its BOREL's subsets²); P the set of all real or complex numbers λ, μ, ν, \dots ; A, M, N the BOREL's subsets² of P . We call *functions of the first kind* all *bounded measurable* (in the sense of BOREL) functions on R with values (called the *coordinates* or *components* of the function) in P . These functions are denoted by f, g, h, \dots The value which f takes in a point x of R is denoted by f_x ; the $\limsup_{x \in R} |f_x|$ ³) by $|f|$. A *function of the second kind* is an *absolutely additive set-function* F , which determines a real or complex number F^X with respect to each BOREL's subset X of R ; the values F^X are called the *coordinates* or the *components* of F . We define $|F| = \limsup |F^{X_i}|$, where the X_i form any dissection of R into disjoint subsets. Further E^X denotes the "characteristic function of the first kind" of the set X , and

¹) A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie in den verschiedenen Funktionalräumen, I. Vektorialen und Tensorialen, Jn. Fac. of Sc. Hokkaido Imp. Univ. (1) 3, 43—106 (1935).

²) Or more generally a closed family of subsets, i. e. a family, which contains with each subset X also its complement $R - X$ and with each sequence of sets X_1, X_2, \dots also its intersection. BOREL's subsets are all sets, obtained from open sets by application of these two processes.

³) \in means "belongs to" or "is an element of".

E_x the "characteristic function of the second kind" of the point x ⁴⁾; both are defined by their coordinates

$$E_x^X = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in X \\ 0 & \text{if } x \in R - X \end{cases} \quad \dots \quad (1)$$

2. If f and F are a function of the first and the second kind respectively, the limit $\lim \sum F^{X_i} f_{x_i}$ exists, where the X_i form a dissection of R , such that the variation of f_x on each X_i is $\leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), and that x_i is an arbitrary point in X_i . Moreover this limit is independent of the choice of the X_i and the x_i . It is called the *transvection* of F and f ,

and denoted by $\int F^{dx} f_x$ ⁵⁾, or shortly by Ff .

We have $|Ff| \leq |F| |f|$. In particular we note the relations

$$\left. \begin{aligned} \int E_x^{dy} f_y &= f_x \\ \int F^{dy} E_x^X &= F^X \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

for any f or F .

3. A *functional* of the first (second) kind is a law, which determines a number $L[f]$ ($l[f]$) with respect to each function of the first (second) kind. After a well-known theorem of F. RIESZ, generalized by J. RADON, each *bounded linear*^{5a)} functional of the first kind determines a function of the second kind, viz $L^X = L[E^X]$, such that $L[f] = \int L^{dx} f_x$. An analogous theorem does not hold for functionals of the second kind.

4. Because of RIESZ' theorem each bounded linear transformation of functions of the first kind $f \rightarrow g = Pf$ determines a set of components P_x^X , which for any fixed X (or x) are the coordinates of a function of the first (or second) kind, such that $g_x = \int P_x^{dy} f_y$, with a

finite value of $|P| = \limsup \left| \frac{\int \int F^{dx} P_x^{dy} f_y}{|F| |f|} \right|$. Evidently the identical transformation has because of (2) the components E_x^X , defined by (1). Moreover P_x^X determines also a linear transformation for functions of

⁴⁾ Hence E^X is for each given X a function of the first kind with values E_x^X ; E_x is for each given x a function of the second kind with the same values E_x^X .

⁵⁾ Of course we could just as well drop the integral-sign and adopt the summation-convention.

^{5a)} "Linear" in the strong sense: also for infinite sums $\sum f_{yx} = f_x$ and non-uniform convergence $L[f] = \sum L[f_y]$.

the second kind, viz $F \rightarrow G = FP$, with $G^X = \int F^{dy} P_y^X$. The product

$R = QP$ of two transformations has the components $R_x^X = \int Q_x^{dy} P_y^X$.

We note the inequalities $|Pf| \leq |P||f|$; $|FP| \leq |F||P|$; $|QP| \leq |Q||P|$. Q is called a lefthanded or righthanded or unique inverse of P , if $QP = E$ or $PQ = E$ or $QP = PQ = E$ respectively.

5. If R' is a second topological space (with points x' etc. and subsets X' etc.), we can consider also linear transformations of functions on R into functions on R' . We denote the components of such a transformation by $E_x^{X'}$ and suppose it to have a unique inverse with the components $E_{x'}^X$:

$$\int E_x^{dy'} E_{y'}^X = E_x^X; \quad \int E_x^{dy'} E_y^{X'} = E_{x'}^{X'}. \quad \dots \quad (3)$$

Then we can consider the coordinates f_x (or F^X) of any function f (or F) of the first (or second) kind and those of its transformed, viz

$$f_{x'} = \int E_{x'}^{dy} f_y \quad (\text{or } F^{X'} = \int F^{dy} E_y^{X'}), \quad \dots \quad (4)$$

as different sets of components of one single object, which is called a covariant (or contravariant respectively)⁶⁾ *vectorial*. Evidently the transvection is an invariant:

$$\int F^{dx'} f_{x'} = \int F^{dx} f_x.$$

Now we can define in the usual way general affinorials and tensorials, e.g. G^{XY} , h_{xy} , P_x^X etc., Hermitean tensorials etc. A particular tensorial⁷⁾ is obtained as soon as a volume-measurement in R is given, viz

$$G^{X,Y} = G^{Y,X} = M^{X,Y}, \quad \dots \quad (5)$$

where M^X is the volume ("measure") of X in the sens of LEBESGUE, and X, Y is the intersection of X and Y . It is to be noted, that neither a Hermitean nor an ordinary tensorial can have properties analogous to those of a tensor of highest rank: for all G^{XY} and h_{xy} $\int G^{Xdy} h_{yz} \neq E_x^X$.

⁶⁾ Evidently the words covariant and contravariant as well as the upper and lower suffixes could have been interchanged; they have been defined such that the relation with ordinary differential geometry which is discussed in Art. 15 becomes as simple as possible. Cf. ¹¹).

⁷⁾ It can also be considered as a Hermitean tensorial.

6. An ordinary integral equation of the second kind has the form $(E + K)f = g$ with $K_x^X = \int G^{Xdy} K_{yx}$, $G^{X,Y} = M^{X,Y}$.

If K_{xy} is symmetrical and completely continuous, the proper functions form a complete orthogonal system. Writing φ_x^n instead of $\varphi_n(x)$ and ψ_n^X instead of $\int_X \bar{\varphi}_n(x) dx$ we have

$$\int \psi_n^{dx} \varphi_x^m = \delta_n^m, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (6)$$

($m, n = 1, 2, 3, \dots$). Evidently we can consider also general systems φ_x^n, ψ_n^X with the property (6) and with $\psi_n^X \neq \int_X \bar{\varphi}_n(x) dx$; these are usually

called (without much reason) "bi-orthogonal systems". The development of functions of either kind (if possible at all) is given by

$$f_x = \varphi_x^n f_n, \quad f_n = \int \psi_n^{dx} f_x, \dots \dots \dots \dots \dots \quad (7)$$

$$F^X = F^n \psi_n^X, \quad F^n = \int F^{dx} \varphi_x^n, \dots \dots \dots \dots \quad (8)$$

Evidently the coefficients of the development f_n, F^n can be considered as a new kind of components or coordinates of the vectorials f and F , just like the f_x and F^X . The only difference is (apart from the irrelevant fact that the f_n, F^n form a countable, the f_x, F^X an uncountable set) that the latter are not independent, whereas the former are. This however is not so very important; for functions of the second kind we cannot find (in general at least) any independent coordinates at all, so that we are forced here to work always with superabundant coordinates.

If the number of functions φ_x^n, ψ_n^X is finite, we can also form the sum

$$\varphi_x^n \psi_n^X = D_x^X; \dots \dots \dots \dots \dots \quad (9)$$

if it is infinite however the series (9) is generally divergent.

Finally we remark that it would be more consequent to write D_x^n, D_n^X instead of φ_x^n, ψ_n^X , as all these quantities are different components of the same geometric object, viz the projection of all functions of either kind on a definite linear subset.

Instead of a sequence of functions D_n^X (or ψ_n^X) we can also consider an arbitrary set of functions of the second kind D_ξ^X , where ξ runs through any topological space Σ . If \mathcal{E} runs through the BOREL's subsets of this

space, the functions of the first kind D_x^n (or φ_x^n) have to be replaced by D_x^{Ξ} , and the relations (6), (7), (8), (9) become:

$$\int D_{\xi}^{dx} D_x^{\Xi} = D_{\xi}^{\Xi} = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi \in \Xi \\ 0 & \text{if } \xi \notin \Xi \end{cases} \quad \dots \quad (6')$$

$$f_x = \int D_x^{dx} f_{\xi}, \quad f_{\xi} = \int D_{\xi}^{dx} f_x, \quad \dots \quad (7')$$

$$F^X = \int F^{d\xi} D_{\xi}^X, \quad F^{\Xi} = \int F^{dx} D_x^{\Xi} \quad \dots \quad (8')$$

$$\int D_x^{d\xi} D_{\xi}^X = D_x^X. \quad \dots \quad (9')$$

Here indeed non-trivial cases exist, where the integral (9') is convergent.

7. If for any linear operator P (which we suppose to be bounded and to have finite components P_x^X) the proper-value-problem can be solved (e.g. if P is Hermitean with respect to a positive definite tensorial), it can be written in the form⁸⁾:

$$P = \int \lambda E_P^{d\lambda}, \quad \text{i. e. } P_x^X = \int \lambda E_P^{d\lambda X}, \quad \dots \quad (10)$$

where λ runs through the set P of all real numbers, and the components E_P^A of the identity satisfy the conditions

$$E_P^A E_P^M = E_P^{A.M}, \quad \dots \quad (11)$$

$$\int_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} E_P^{d\lambda} = E \quad \dots \quad (12)$$

Then for any polynomial $\varphi(P)$ we have also $\varphi(P)_x^X = \int \varphi(\lambda) E_P^{d\lambda X}$, or, writing φ_P and φ_{λ} instead of $\varphi(P)$ and $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi_P = \int \varphi_{\lambda} E_P^{d\lambda}, \quad \text{i. e. } \varphi_P^X = \int \varphi_{\lambda} E_P^{d\lambda X}, \quad \dots \quad (13)$$

If φ is any measurable function of λ , (13) can be considered as the definition of φ_P . If we take in particular $\varphi = B^A$, where

$$B_{\lambda}^A = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda \in A, \\ 0 & \text{if } \lambda \notin A, \end{cases} \quad \dots \quad (14)$$

⁸⁾ Cf. J. VON NEUMANN, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin (1932) Ch. II, 6-9.

we obtain

$$B_p^A = E_p^A, \quad \text{i. e. } E_{px}^{AX} = (B_p^A)_x^X. \quad \dots \quad (15)$$

Hence the E_p^A are definite functions of P (viz characteristic functions). Evidently (13) is invariant if we perform on λ a transformation of the type considered in Art. 5. Then we obtain

$$\varphi_p = \int \varphi_{\lambda'} E_p^{d\lambda'} \quad \dots \quad (16)$$

where λ' now runs through any topological space, which need not be a set of real numbers. Of course now the *form* of the functions φ_p and $\varphi_{\lambda'}$ need no longer be the same, as it was in (13), at least for polynomials. At the other hand (16) can always be brought into the form (13) by means of LEBESQUE's definition of the integral, and is therefore not really more general than (13).

§ 2. Analysis in function-space.

8. Let $\phi[f]$ be any functional of the first kind. The derivative of ϕ with respect to a set X is defined⁹⁾ as

$$\delta^X \phi[f] = \left(\frac{\partial \phi}{\partial f} \right)^X = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi[f + \varepsilon E^X] - \phi[f]}{\varepsilon} \quad \dots \quad (17)$$

If this limit exists for some f and any X and is a bounded and continuous functional of f , it is (for a given f) a function of the second kind¹⁰⁾. In that case the differential or "variation" $\delta \phi$ of ϕ under any variation δf , defined by $\delta \phi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \phi[f + \varepsilon \delta f]$ is equal to

$$\delta \phi = \int (\delta^X \phi) \delta f_x. \quad \dots \quad (18)$$

For analytic functionals

$$\phi[f] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \phi^{dx_1 \dots dx_n} f_{x_1} \dots f_{x_n}$$

with

$$\lim \sup \frac{\left| \int \dots \int \phi^{dx_1 \dots dx_n} \frac{1}{u_{x_1} \dots u_{x_n}} \right|}{\left| \frac{1}{u} \dots \frac{n}{u} \right|} \leq MN^{-n}$$

⁹⁾ Cf. D. VAN DANTZIG, La notion de dérivée d'une fonctionnelle, C. R. 201 (1935) 1008—1010, where the definition was given for functionals which need only be defined for all *continuous* functions.

¹⁰⁾ Contrary to VOLTERRA's definition, our definition does not depend on the geometric structure of R .

and $|f| < N$ the derivative (17) exists always and we have

$$\phi^{x_1 \dots x_n} = (\partial^{x_1} \dots \partial^{x_n} \phi [f])_{f=0}.$$

9. If $\varphi [F]$ is any functional of the second kind we can define the derivative with respect to a point x by

$$\partial_x \varphi [F] = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial F} \right)_x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi [F + \varepsilon E_x] - \varphi [F]}{\varepsilon}. \dots \quad (19)$$

In this case, however, we cannot generally prove, but must *assume* explicitly, that the variation $\delta \varphi$, defined by $\delta \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d \varepsilon} \varphi [F + \varepsilon \delta F]$ is equal to

$$\delta \varphi = \int \delta F^{dx} \partial_x \varphi. \dots \dots \dots \quad (20)$$

For analytic functionals of the second kind

$$\varphi [F] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int F^{dx_1} \dots F^{dx_n} \varphi_{x_1 \dots x_n}$$

with $\limsup |\varphi_{x_1 \dots x_n}| \leq MN^{-n}$ and $|F| < N$ the derivative (19) exists always and we have

$$\varphi_{x_1 \dots x_n} = (\partial_{x_1} \dots \partial_{x_n} \varphi [F])_{F=0}.$$

In this case also the relation (18) holds for every δF .

10. In an analogous way we can define derivatives of more general functionals. As an example we consider a functional $\varphi [U]$, where U has the components $U_{\dots z}^{XY}$. If $E_{xy}^{z\dots}$ is the mixed affinorial with the components $(E_{xy}^{z\dots})^{XY} = E_x^X E_y^Y E_z^Z$, we define

$$\partial_{xy}^{z\dots} \varphi [U] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi [U + \varepsilon E_{xy}^{z\dots}] - \varphi [U]}{\varepsilon}. \dots \quad (21)$$

For functionals of linear operators P with components P_x^X , we would obtain in the same way

$$\partial_{\dots x}^X \varphi [P] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi [P + \varepsilon E_{\dots x}^X] - \varphi [P]}{\varepsilon}. \dots \quad (22)$$

11. In the last-mentioned case we can define another kind of derivative, which is simply the spur of (22), viz

$$\varphi' [P] = \frac{d\varphi}{dP} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi [P + \varepsilon E] - \varphi [P]}{\varepsilon} = \int \partial_{\dots x}^{dx} \varphi [P]. \dots \quad (23)$$

Of course it can be used also if φ itself is (apart from being a functional of P) a function of either kind. If φ itself is a linear operator with components $\varphi_x^X, \varphi_x'^X$ becomes the derivative $\left(\frac{d\varphi}{dP}\right)_x^X$ which is usually considered^{10a)} in operational calculus. Writing again φ_P instead of $\varphi[P]$ and assuming φ_P to possess a development of the form (13) we find simply

$$\varphi'_P = \int \frac{d\varphi}{d\lambda} E_P^{d\lambda} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (24)$$

12. In an analogous way we could define an operational derivative of ordinary functions $\varphi(\lambda)$ of a real variable, viz

$$\partial_x^X \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\lambda + \varepsilon E_x^X) - \varphi(\lambda)}{\varepsilon}$$

This derivative, however, is not very important, as it is equal to $\frac{d\varphi}{d\lambda} E_x^X$.

13. We can introduce now *functional transformations* of different kinds. Let us consider as an example those which correspond with the case treated in Art. 8. Therefore let $\varphi_{x'}[f]$ be a functional of the first kind, and at the same time a function of the first kind on some set R' . Moreover, let it possess a continuous derivative

$$E_{x'}^X[f] = \partial_x^X \varphi_{x'}[f], \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (25)$$

and let the transformation $f_x \rightarrow f_{x'} = \varphi_{x'}[f]$ possess a unique inverse one. Then $E_{x'}^X$ and $E_x^{X'}$ satisfy (3) if the "same" function f (with coordinates f_x or $f_{x'}$) is substituted. Then we can extend the definitions of vectorials, tensorials and affinorials to such quantities which are functionals of f , all transformations being performed by means of $E_x^{X'}[f]$ and $E_{x'}^X[f]$.

14. Also linear connections can be introduced, which in this case belong to *contravariant* derivation. Indeed, if $\Gamma_z^{XY} = \Gamma_z^{XY}[f]$ are defined with respect to each system of coordinates $f_x, f_{x'}$, etc., such that the law of transformation is

$$\Gamma_z^{X'Y'} = \iint \iint E_x^{X'} E_y^{Y'} \Gamma_z^{dx, dy} E_{z'}^{dz} + \int E_{z'}^{dz} \partial^{X'} E_z^{Y'}, \quad \dots \quad (26)$$

the contravariant derivatives of e. g. vectorials v_x and V^X , viz.

$$\left. \begin{aligned} \nabla^Y v_x &= \partial^Y v_x + \int \Gamma_x^{Ydx} v_z, \\ \nabla^Y V^X &= \partial^Y V^X - \int \Gamma_z^{YX} V^{dz}, \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (27)$$

^{10a)} In particular if φ is a function (not merely a functional) of P .

are evidently affinorials. For the affinorials of torsion and of curvature we find in the usual way

$$S_{\dots x}^{ZY} = 2 \Gamma_x^{[ZY]}, \dots \dots \dots \quad (28)$$

$$R_{\dots w}^{ZYX} = 2 \delta^{[Z} \Gamma_w^{Y]X} + 2 \int \Gamma_w^{[Z|du|} \Gamma_u^{Y]X}, \dots \dots \quad (29)$$

and

$$\left. \begin{aligned} 2 \nabla^{[Z} \nabla^{Y]} v_w &= \int R_{\dots w}^{ZYdx} v_x - 2 \int (\nabla^{dx} v_w) S_{\dots x}^{ZY}, \\ 2 \nabla^{[Z} \nabla^{Y]} V^X &= \int R_{\dots w}^{ZYX} V^{dw} - 2 \int (\nabla^{dw} V^X) S_{\dots w}^{ZY} \end{aligned} \right\} . \quad (30)$$

Hence the whole theory of linear connections, of parallel displacement, etc. can be extended, except of course the theory of Riemannian and conformal connections, as no tensorial G^{XY} or g_{xy} has a reciprocal one. To generalize these theories also we must consider the case in ordinary differential geometry, where tensors of lower rank are given. If we have e. g. two tensorials G^{XY} , h_{xy} , such that

$$\int G^{Xdy} h_{yz} = D_z^X$$

is idempotent: $D^2 = D$, then we can define a Riemannian connection for such functions only, which are invariant under the transformation D : $Df = f$ or $FD = D$.

Evidently analogous definitions can be given for functional transformations of the second kind $F^{X'} = \phi^{X'}[F]$, for transformations of operators $P_x^{X'} = \varphi_x^{X'}[P]$, etc. where the derivatives, defined in Art. 9 and 10 are used.

15. The theory which is represented here shows a twofold relation with ordinary differential geometry. First, the latter is a special case of the former. Indeed, if we take for R a *finite* set, the functions of the first and second kind can be identified with co- and contravariant vectors or reciprocally.

A second and more interesting relation is obtained, if we take R to be an ordinary differentiable manifold of n dimensions (an X_n). A scalarfield p in R becomes now a function p_x of the first kind. A covariant vectorfield w_i must be written w_{xi} . If x^i are the coordinates of the point x and $y^i = x^i + dx^i$ those of a neighbouring point, w_{xi} determines the differential form $w_{xi} dx^i$, which is, but for quantities of the second order, equal to $\frac{1}{2} (w_{xi} + w_{yi}) dx^i$ or to $\frac{1}{2} (w_{xi} + w_{yi}) (y^i - x^i)$. Denoting the latter quantity by w_{xy} , we see that w_{xy} is an alternating two-point-

function. In the same way, if $w_{i_1 \dots i_k} = w_{x i_1 \dots i_k}$ is a k -vectorfield, and if $x_r^i = x_0^i + d_r x^i$ ($r = 1, \dots, k$), are k neighboring points of $x_0^i = x^i$, $w_{i_1 \dots i_k}$ determines the differential form

$$\begin{aligned} w_{x i_1 \dots i_k} d_1 x^{i_1} \dots d_k x^{i_k} &\sim \frac{1}{k+1} (w_{x i_1 \dots i_k} + \sum_{r=1}^k w_{x_r i_1 \dots i_k}) d_1 x^{i_1} \dots d_k x^{i_k} \sim \\ &\sim \frac{1}{k+1} \sum_{r=0}^k w_{x_r i_1 \dots i_k} \cdot \sum_{r=0}^k (-1)^r x_0^{i_1} \dots x_{r-1}^{i_r} x_{r+1}^{i_{r+1}} \dots x_k^{i_k}. \end{aligned}$$

Hence a covariant k -vector corresponds with an alternating $(k+1)$ -point-function, or rather with a class of such functions, which differ only by quantities of the $(k+1)^{\text{th}}$ order of smallness, if the mutual distances of the $k+1$ points are small of the first order. If in particular the k -vector is the exterior derivative of a $(k-1)$ -vector:

$$w_{x i_1 \dots i_k} = k! \partial_{[i_1} v_{i_2 \dots i_k]}, \dots \dots \dots \quad (31)$$

we find that the relation between $w_{x x_1 \dots x_k}$ and $v_{x_1 \dots x_k}$, corresponding with (31), is

$$w_{x x_1 \dots x_k} = (k+1)! 1_x v_{x_1 \dots x_k}, \dots \dots \dots \quad (32)$$

where 1_x is the function (corresponding with the scalar 1), which takes the value 1 in each point of R . Hence we see that the operation of derivation in X_n corresponds with the purely *algebraical* operation (32) in the corresponding alternating function-space¹¹⁾. Analogous relations exist between $(k+1)$ -fold alternating set-functions $F^{x_0 \dots x_k}$ and contravariant k -vector-densities of weight 1 $\mathfrak{F}^{i_1 \dots i_k}$; with $\partial_{i_1} \mathfrak{F}^{i_1 \dots i_k}$ corresponds here $\int 1_x F^{dx x_1 \dots x_k}$.

The analogy considered here is of importance for the abstract theory of differentiation and integration¹²⁾ and for the foundations of topology.

¹¹⁾ This is the reason why we have written the point-functions with *lower* suffixes. Cf⁶⁾.

¹²⁾ Cf. J. W. ALEXANDER, On the chains of a complex and their duals; On the ring of a compact metric space, Proc. Nat. Ac. Sc. **21** 509–511; 511–512 (1935).